

Introduzione alla Analisi Nonlineare

Premesse teoriche, modalità operative ed utilizzo nella progettazione

Raffaele Casciaro

professore emerito di Scienza delle Costruzioni
Università della Calabria
<http://www.labmec.unical.it>

Newsoft s.a.s. - Cosenza
<http://www.newsoft-eng.it>

rcasciaro@gmail.com - raffaele.casciaro@unical.it
https://www.researchgate.net/profile/Raffaele_Casciaro

Ordine degli Ingegneri Roma - giugno 2017

Obbiettivi della presentazione

L'introduzione, a partire dalle NTC 2005, di un approccio a base prestazionale ha aperto all'utilizzo dell'analisi nonlineare come strumento di progettazione e verifica delle strutture, specie in zona sismica.

La presentazione intende fornire una introduzione all'uso della analisi nonlineare, in particolare nell'edilizia antisismica. Sarà necessario tuttavia premettere una descrizione sia pur sintetica delle sue basi teoriche e delle metodologie di soluzione che ne permettono l'utilizzo.

Affronterà i seguenti argomenti:

- 1 **La plasticità:** capacità portante e sicurezza statica delle strutture.
- 2 **La dinamica linearizzata:** dinamica modale ed analisi sismica.
- 3 **Il metodo degli elementi finiti:** introduzione al metodo ed al suo uso nella progettazione antisismica.
- 4 **L'analisi pushover:** ed il suo uso nella progettazione antisismica.
- 5 **Modellazine ed analisi di strutture in muratura:** sintesi di alcune esperienze di ricerca.

Introduzione alla plasticità

Capacità portante e sicurezza statica delle strutture

Raffaele Casciaro

professore emerito di Scienza delle Costruzioni
Università della Calabria
<http://www.labmec.unical.it>

Newsoft s.a.s. - Cosenza
<http://www.newsoft-eng.it>

rcasciaro@gmail.com - raffaele.casciaro@unical.it
https://www.researchgate.net/profile/Raffaele_Casciaro

Ordine degli Ingegneri Roma - giugno 2017

Obbiettivi della presentazione

L'analisi nonlineare rappresenta uno strumento potente, ma richiede una adeguata consapevolezza dei risultati teorici che ne stanno alla base.

Si vuole qui fornire una introduzione alla teoria della plasticità, comprensiva delle motivazioni, dei risultati teorici di base e degli strumenti di analisi attualmente disponibili.

La presentazione affronterà i seguenti argomenti:

- **Analisi lineare.**
Motivazioni e limiti dell'analisi lineare.
- **Teoria della plasticità.**
Plasticità standard, i teoremi dell'analisi limite e dell'adattamento plastico.
- **Significato delle verifiche in campo lineare.**
La capacità portante della struttura, influenza degli errori di modellazione.
- **Analisi limite ed adattamento plastico.**
Strategie disponibili per l'analisi limite e ad adattamento.

Importanza di una modellazione nonlineare

Sempre più spesso l'analisi viene condotta in ambito nonlineare. Ciò è conseguenza di una serie di fattori:

- Il comportamento delle strutture è essenzialmente nonlineare.
- Le procedure tradizionali di analisi, basate su soluzioni elastiche e verifiche alle tensioni ammissibili, hanno solo base convenzionale.
- La diffusione di calcolatori digitali, sempre più potenti ed a basso costo, permette un uso generalizzato di procedure ed algoritmi basati su analisi nonlineare.
- Le nuove normative sono ormai, e lo saranno saranno sempre di più in futuro, basate su approcci e criteri di analisi nonlineare.
- Il comportamento nonlineare discende sia da aspetti fisici legati alla nonlinearietà costitutiva dei materiali (**plasticità, frattura**) che da aspetti puramente geometrici legati al principio di oggettività (indipendenza rispetto all'osservatore) (**Instabilità**).
- Solo il primo aspetto sarà trattato in questa presentazione.

Concetti a base della teoria della plasticità

Il comportamento nonlineare dei materiali può essere inquadrato nella **teoria della plasticità**. La teoria è ben consolidata e si basa sui seguenti concetti:

- **Soglia di resistenza.**

In ogni punto del corpo da analizzare la tensione $\boldsymbol{\sigma} := \{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_{zz}\}$ si mantiene comunque interna ad un dominio dello spazio delle tensioni:

$$\mathcal{D}_e := \{\boldsymbol{\sigma} : f[\boldsymbol{\sigma}] \leq 1\} \quad (\text{Dominio elastico del materiale})$$

- **Deformazioni plastiche.**

In un ciclo di carico/scarico la struttura non recupera interamente la configurazione iniziale per la nascita di deformazioni anelastiche irreversibili.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (\text{Legame elastoplastico incrementale})$$

- **Comportamento elastico per bassi livelli di tensione.**

Per bassi valori della tensione ($f[\boldsymbol{\sigma}] < 1$), il comportamento è puramente elastico (si ha cioè $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$).

Il legame è espresso in formato incrementale. Ciò permette una descrizione più agevole del comportamento essenzialmente **anolonomo** dei materiali.

L'analisi lineare

- Valutare la capacità portante e quindi il grado di sicurezza a collasso di una struttura è l'obiettivo più importante per l'ingegnere.
- L'analisi lineare, in quanto basata sul rapporto lineare tra cause (azione esterna) ed effetti (spostamenti, deformazioni e tensioni), non è in grado di fornire alcuna indicazione al riguardo.
- Sappiamo tuttavia che i materiali impiegati non sono in grado di reggere tensioni superiori ad una soglia limite, caratteristica del materiale anche se a livelli di tensione più bassi presentano un comportamento elastico-lineare.
- La verifica di sicurezza viene effettuata controllando che le tensioni restino opportunamente inferiori ai valori di soglia e la capacità portante è valutata come massimo valore del carico per cui la verifica è ancora soddisfatta.
- Ciò è motivato da seguente esperimento concettuale:
 - ① Si pensi di applicare il carico poco alla volta, a partire da zero, fino ad arrivare, almeno in un punto della struttura, a raggiungere il valore di soglia.
 - ② Da ora in avanti, la struttura potrà collassare o meno (dando prova di ulteriori riserve di resistenza). In ogni caso il valore raggiunto dal carico può essere preso, a vantaggio di sicurezza, come rappresentativo della portanza.

Limiti dell'analisi lineare

L'analisi lineare si presenta molto semplice in quanto, con la diffusione del calcolo digitale, la soluzione di sistemi lineari (10000 ~ 100000 variabili) è diventata una operazione banale.

Tuttavia, un dettaglio essenziale ne inficia la validità:

- **non conosciamo in realtà le tensioni iniziali, a carico nullo, presenti nella struttura, ne siamo in grado di valutarle in maniera affidabile.**

Le tensioni iniziali provengono da fatti diversi, alcuni dei quali al di fuori del nostro controllo (processi di laminazione e saldatura degli elementi metallici, ritiro del calcestruzzo, assestamenti della fondazione ed altro), e possono raggiungere valori notevoli, dell'ordine dei valori di soglia.

Tutto ciò inficia l'affidabilità dei risultati forniti dalla verifica, almeno alla luce delle giustificazioni finora fornite.

Vedremo nel seguito come il reale significato della analisi lineare quale metodo di verifica statica possa ricavarsi, in modo coerente, come conseguenza diretta della teoria della plasticità.

Il postulato di Drucker

Per definire compiutamente il comportamento elasto-plastico è richiesta una ulteriore caratterizzazione fornita, nel modo più elegante, dal postulato di Drucker (1951):

- *Sia la struttura soggetta ad un ciclo di carico scarico dovuto all'applicazione di un sistema di forze addizionali. Risulta:*
 - 1) *durante la fase di carico, il lavoro prodotto dalle forze addizionali è non negativo;*
 - 2) *durante l'intero ciclo, il lavoro prodotto dalle forze addizionali è non negativo.*

Si dimostra facilmente che, in tali condizioni, vale la condizione

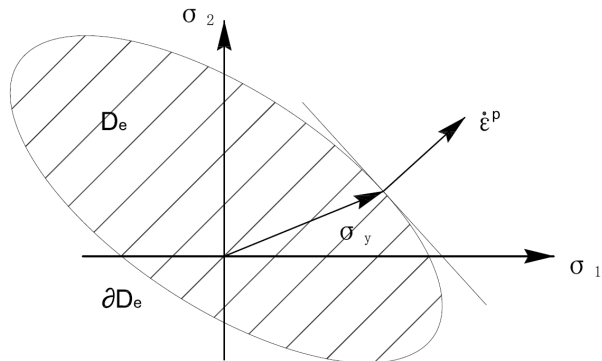
$$(\boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\sigma}_a)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \geq 0 \quad (\text{diseguaglianza di Drucker})$$

essendo $\boldsymbol{\sigma}_a$ una generica tensione ammissibile ($\boldsymbol{\sigma}_a \in \mathcal{D}_e$) e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ la deformazione plastica incrementale associata alla tensione di snervamento $\boldsymbol{\sigma}_y$. La disequaglianza comporta i seguenti risultati:

- *Il domino elastico \mathcal{D}_e è convesso.*
- *La deformazione plastica è normale al contorno del domino elastico (superficie di snervamento).*

Il legame elasto-plastico standard (alla Drucker).

La diseuguaglianza di Drucker dei materiali elastoplastici standard, caratterizzati dal convessità del dominio elastico e dalla normalità della deformazione plastica.



Collasso plastico

A partire da questi risultati è possibile dare risposta al seguente interrogativo:

- *Data una struttura soggetta a caricamento proporzionale $\lambda \mathbf{p}$, determinare il massimo valore del fattore di amplificazione λ , ancora sopportabile dalla struttura.*

L'importanza tecnica del problema è evidente: se \mathbf{p} rappresenta il carico esterno agente, il valore λ_{max} permette una stima della sicurezza a collasso della struttura. Valgono inoltre le seguenti considerazioni

- Il problema ha senso solo se la funzione $f[\boldsymbol{\sigma}]$ è costante (*materiali elasto-plastici perfetti*) o, quanto meno, è definita una superficie di inviluppo limite.
- La presenza di zone isolate a comportamento plastico, racchiuse in una matrice elastica che ne limita le deformazioni, non rappresenta necessariamente causa di collasso.
- Questa riserva viene meno se la deformazione plastica può svilupparsi liberamente formando un meccanismo cinematicamente ammissibile:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \iff \dot{\mathbf{u}}^P$$

- **Questa circostanza, corrisponde al collasso della struttura.**

Teoremi dell'analisi limite

Data una struttura soggetta a carico proporzionale $\lambda \mathbf{p}$, valgono i seguenti due teoremi (Greenberg & Prager 1951):

- **Teorema statico dell'analisi limite**

Il moltiplicatore di collasso λ_c è il massimo tra tutti i moltiplicatori λ_a associati a stati di tensione equilibrati e plasticamente ammissibili, tali cioè che $f[\boldsymbol{\sigma}] \leq 1$ in tutti i punti del corpo:

$$\lambda_c \geq \lambda_a$$

- **Teorema cinematico dell'analisi limite**

Il moltiplicatore di collasso λ_c è il minimo tra tutti i moltiplicatori λ_p associati a meccanismi plastici cinematicamente compatibili $\boldsymbol{\epsilon}^p \Leftrightarrow \mathbf{u}^p$:

$$\lambda_c \leq \lambda_p$$

Conseguenze dei due teoremi

Dai due teoremi dell'analisi limite discendono alcune conseguenze di grande interesse:

- Il carico di collasso dipende solo dalla struttura e della forma del carico. Altri elementi, quali il comportamento elastico o le tensioni iniziali sono del tutto ininfluenti.
Ciò è conveniente in quanto non riusciremmo a valutare le tensioni iniziali e spesso solo in forma grossolana il comportamento elastico.
- La verifica in fase elastica si basa su una soluzione elastica, che è quindi equilibrata ma anche plasticamente ammissibile, per costruzione.
Il fattore di sicurezza λ_E fornito dalla verifica elastica risulta quindi, per il teorema statico, inferiore o eguale a quello di collasso ($\lambda_e \leq \lambda_c$).
La verifica in fase elastica corrisponde pertanto ad una approssimazione a vantaggio di sicurezza della verifica a collasso.
- Errori nella stima dei fattori elastici o, più genericamente, nella compatibilità della cinematica, non inficiano questo significato della verifica.
Ciò è conveniente in quanto non sempre siamo coerenti nella modellazione di questi aspetti. Ad es., nelle strutture in C.A., si assume la sezione pienamente reagente in fase di analisi, e parzializzata in fase di verifica.

Carattere ciclico del processo di carico

I risultati finora raggiunti sono importanti. È tuttavia necessario un ulteriore approfondimento.

- Per quanto detto, l'analisi lineare e la verifica alle tensioni ammissibili riescono a caratterizzare la sicurezza strutturale, malgrado siano basate solo su soluzioni nominali che non tengono conto delle reali condizioni iniziali della struttura.
- Abbiamo tuttavia fin qui considerato la presenza di una sola condizione di carico, peraltro assunta monotonamente crescente. Questo è un caso puramente ideale che non trova rispecchio nella realtà.
- Le strutture sono infatti soggette nel corso dell'esercizio ad una combinazione di condizioni di carico diverse, di origine sia antropica che naturale, ciascuna delle quali varia nel tempo alternando cicli di carico e scarico.
- Non possiamo definire con precisione l'evoluzione del carico ma solo individuare possibili scenari (più o meno frequenti o del tutto eccezionali) ed assegnare a ciascuna tipologia di carico un intervallo min/max di fattori di combinazione, definendo così il solo dominio di involucro complessivo dei carichi.
- In queste condizioni, la verifica a collasso, anche se soddisfatta singolarmente per tutte le possibili combinazioni previste, non è più sufficiente a garantire la sicurezza dell'opera

Adattamento plastico (shakedown)

- In strutture soggette a cicli ripetuti di carico/scarico, il collasso plastico non è la principale causa di pericolo.
- Infatti, anche se la condizione di collasso non viene mai raggiunta durante il processo di carico, ogni ciclo tende a generare nuove deformazioni plastiche.
- Deformazioni plastiche isolate sono facilmente assorbite dalla struttura come normale assestamento.
- La formazione di nuove deformazioni plastiche ad ogni ciclo di carico porterebbe invece a deformazioni eccessive per la funzionalità della struttura (in caso di cumulo) o a danneggiamento per fatica (in caso di deformazioni plastiche alternate a parziale compenso).
- In entrambi questi casi, il procedere continuo della deformazione plastica comporta, inevitabilmente, la rovina della struttura.
- La rovina si evita solo se, dopo un numero limitato di cicli (il periodo di rodaggio), la nascita di nuove deformazioni plastiche si arresta e la struttura ritorna di nuovo ad un comportamento puramente elastico.
- Quando ciò avviene si parla di **adattamento plastico o shakedown**.

Il teorema statico dell'adattamento

Per le considerazioni fatte è tecnicamente rilevante il seguente interrogativo:

- *Data una struttura soggetta a carichi $\mathbf{p}[t]$ variabili nel tempo all'interno di un dominio di forma prefissata \mathcal{P} , determinare il massimo valore λ_s di amplificazione dei carichi per cui la struttura ancora presenta adattamento.*

Risponde a questa domanda il seguente teorema (Melan 1936).

- **Teorema dell'adattamento plastico**

Indicando con $\sigma_E[t]$ la soluzione elastica (vera) conseguente al carico $\mathbf{p}[t]$ e con S il suo involuppo complessivo, la struttura raggiunge adattamento per $\lambda \leq \lambda_s$ se esiste un campo di autotensioni indipendente dal tempo $\bar{\sigma}$ tale che risulti:

$$\sigma^* := \sigma_E + \bar{\sigma} \quad , \quad f[\lambda \sigma^*] < 1 \quad \forall \sigma_E \in S$$

Possiamo interpretare il campo $\lambda \bar{\sigma}$ come possibile errore nella valutazione delle tensioni iniziali (a carichi nulli) e quindi $\lambda \sigma^*$ come una possibile soluzione elastica nominale. Il teorema ci dice pertanto che se la verifica in fase elastica è soddisfatta per tutti i possibili carichi dell'involuppo, la struttura si adatterà plasticamente. Risulta ovviamente:

$$\lambda_e \leq \lambda_s \leq \lambda_c$$

Relazioni con la verifica elastica

I risultati appena richiamati chiariscono ulteriormente il significato della verifica in fase elastica:

- La verifica in fase elastica implica non solo quella a collasso ma anche quella ad adattamento plastico, fornendo una approssimazione per difetto del moltiplicatore di adattamento λ_s . E' questo il significato reale della verifica.
- Anche nel caso dell'adattamento, errori nella valutazione dello stato di tensione iniziale sono irrilevanti ai fini della verifica.
- L'adattamento plastico fornisce un approccio sintetico all'analisi di strutture soggette a carichi variabili. Non richiede una informazione completa sull'evoluzione temporale del carico ma solo la conoscenza delle massime escursioni di carico definite dalle regole di combinazione.
- Per contro, il teorema dello shakedown non fornisce informazioni di dettaglio sull'estensione ed entità delle deformazioni plastiche accumulate nella struttura prima di raggiungere l'adattamento, ma solo se questo sia o meno raggiunto.
- Una informazione completa, ottenibile (in linea di principio) con analisi *Thime-History*, richiede una informazione dettagliata della legge di evoluzione del carico ed una modellazione accurata del comportamento strutturale.

Diversa importanza degli errori di modellazione.

Una importante conseguenza di quanto detto è che errori nell'equilibrio o nella cinematica non hanno eguale importanza sull'affidabilità dei risultati dell'analisi:

- **Errori che coinvolgono l'equilibrio sono gravi** in quanto si riflettono direttamente sulla valutazione del fattore di sicurezza sia a collasso che ad adattamento. Ciò comporta la necessità di grande attenzione nella definizione del modello di calcolo per quanto riguarda gli aspetti legati all'equilibrio: corretta messa in conto dei carichi, delle geometrie e delle eccentricità.
- **Errori che coinvolgono la compatibilità hanno minore importanza.** La sicurezza a collasso dipende solo dall'equilibrio e dalle resistenze dei materiali. La sicurezza ad adattamento, non è influenzata da deformazioni che non evolvono nel tempo, come le distorsioni iniziali o quelle prodotte da azioni permanenti.
- In relazione ad azioni permanenti o che non coinvolgono forti variazioni della sollecitazione o siano di durata limitata, possono essere accettati errori anche sensibili nelle deformazioni (o nei moduli elastici) senza compromettere l'affidabilità sul fattore di sicurezza della costruzione.
- Anche se non sempre in modo consapevole, **noi ingegneri usiamo spesso questi concetti nella pratica professionale.**

Licenze ammesse dalla tradizione.

- Gli effetti dei cedimenti prodotto dall'assestamento della fondazione, sono spesso ignorati (o messi in conto solo forfettariamente) ai fini dell'analisi della struttura in elevazione.
- In molti casi, come nel C.A., si fa uso di moduli elastici nominali, anche rozzamente approssimati.
- Sempre nel C.A., si accetta (quasi senza riserve) di far riferimento alla sezione totalmente reagente, in fase di analisi, ed alla sezione parzializzata, in fase di verifica.
- Nei Pilastrini in C.A., viene trascurato (o messo in conto solo forfettariamente) l'effetto delle deformazioni verticali parzialmente assorbite in fase di getto.
- Nel valutare i momenti di continuità trasmessi dai solai alle travi di supporto, vengono trascurati (o messi in conto solo forfettariamente) gli effetti dovuti alle modalità costruttive.
- Viene trascurato (a vantaggio di sicurezza) il contributo di elementi resistenti secondari.

Tutto ciò non pregiudica le verifiche di sicurezza alla luce della teoria standard della plasticità.

Errori assolutamente da non commettere

Sono tutti quelli che coinvolgono l'equilibrio ed hanno quindi diretta influenza sulle valutazioni di sicurezza. Si tratta spesso di errori banali, tanto più frequenti e pericolosi quanto più inseriti in analisi sempre più sofisticate:

- Errori sulla entità e posizione dei carichi agenti o delle masse in gioco.
L'uso di valutazioni forfettarie nell'analisi dei carichi, approssimazione tipica in analisi condotte manualmente, non è ammissibile in analisi automatica.
- Errori nella geometria della struttura e nella definizione dei disassamenti tra gli elementi.
Approssimare la geometria ed ignorare i disassamenti presenti era tipico di analisi manuali ma può condurre a forti errori (anche di più del 50%) in analisi automatica.
- Errori nella valutazione delle resistenze dei materiali.
Errori di questo tipo hanno una ovvia diretta ripercussione sui risultati delle verifiche.
- Fraintendimenti sul significato delle quantità in gioco.
Il fraintendimento spesso nasce da interpretazioni eccessivamente burocratiche della normativa o da abbandono reverenziale verso i programmi di calcolo utilizzati.

Limiti della teoria: danneggiamento e collasso fragile

- I risultati teorici precedenti sono conseguenza del postulato di Drucker.
- Sappiamo tuttavia che a seguito di deformazioni plastiche eccessive, specie se in presenza di plasticità alternata, i materiali utilizzati nelle costruzioni sono soggetti a danneggiamento e possono presentare un comportamento quasi-fragile con forti cadute di resistenza.
- In presenza di questo fenomeno cade la disequaglianza di Drucker e, di conseguenza, le certezze fornite dalla teoria standard.
- Una modellazione accurata della legge di evoluzione del danno è molto complessa in quanto richiede una descrizione a scala fine della struttura e comporta metodologie di analisi sofisticate e comunque molto onerose.
- Si preferisce pertanto introdurre il concetto di duttilità, intesa come escursione massima in deformazione a cui corrisponde un livello di danneggiamento ancora accettabile, e quindi accompagnare la verifica di resistenza ad una verifica separata a duttilità.
- La duttilità resta comunque un concetto ambiguo in quanto il danno raggiunto dipende da tutta la storia precedente di carico e non dalla sola deformazione massima.

Riferimenti



[1960] W.T. Koiter

General Theorems for Elastic-Plastic Solids

in: *Progress in Solids Mechanics*, North-Holand, 1960



[1999] R. Casciaro

Introduction to computational plasticity

Report n.1 Labmec-Unical



[2002] R. Casciaro, G. Garcea

An iterative method for shakedown analysis

Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191 (2002)

Introduzione alla dinamica linearizzata

Dinamica modale ed analisi sismica

Raffaele Casciaro

professore emerito di Scienza delle Costruzioni
Università della Calabria
<http://www.labmec.unical.it>

Newsoft s.a.s. - Cosenza
<http://www.newsoft-eng.it>

rcasciaro@lgmail.com - raffaele.casciaro@unical.it
https://www.researchgate.net/profile/Raffaele_Casciaro

Ordine degli Ingegneri Roma - giugno 2017

Obiettivo della presentazione

Si vuole fornire una introduzione alla dinamica linearizzata e del suo uso nell'analisi sismica.

La presentazione affronterà i seguenti argomenti:

- **Linearizzazione delle equazioni del moto.**
Modellazione elasto–viscosa equivalente, motivazioni, scelte possibili e limiti della equivalenza.
- **Decomposizione spettrale.**
Modi e periodi propri di vibrazione. Decomposizione spettrale
- **Uso degli spettri di risposta.**
Soluzione disaccoppiata per combinazione modale. Descrizione dell'azione esterna in termini di risposta modale.
- **Analisi sismica.** Estensione all'analisi di strutture isteretiche. Il fattore di struttura.

Dissipazione dinamica

- La risposta di una struttura soggetta a carichi dinamici dipende in modo rilevante dai meccanismi dissipativi che le consentono di disperdere l'energia fornita dall'esterno impedendo che questa possa accumularsi nella struttura in forma di energia elastica di deformazione e generare quindi tensioni elevate.
- La dissipazione è essenzialmente originata dal comportamento nonlineare che porta al formarsi di cicli di isteresi (l'area del ciclo corrisponde all'energia dissipata). Altre forme di dissipazione, più propriamente viscosi (effetto aerodinamico, ed altro) sono quantitativamente irrilevanti.
- Il comportamento nonlineare svolge pertanto un ruolo essenziale nella risposta dinamica delle strutture. Al momento, l'onere computazionale richiesto da una analisi dinamica condotta in campo nonlineare è ancora elevato.
- In effetti, l'analisi dinamica nonlineare richiede un approccio incrementale al passo (*Time-History*) e coinvolge un numero elevato di passi (dell'ordine delle migliaia).
- Inoltre, se le azioni esterne sono note solo in termini probabilistici (come in analisi sismica), la risposta può essere solo caratterizzata attraverso simulazioni Montecarlo in cui l'analisi è ripetuta per un numero rilevante di storie di carico (accelerogrammi spettro-compatibili).

Il modello elasto–viscoso equivalente

- La complessità di un approccio realmente non-lineare spinge verso soluzioni lineari approssimate ottenute sostituendo all'effettivo meccanismo dissipativo di tipo isteretico un meccanismo “equivalente” di tipo viscoso. L'equazione di equilibrio dinamico viene scritta nella forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}[t] + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}[t] + \mathbf{K} \mathbf{u}[t] = \mathbf{f}[t]$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidità, \mathbf{C} la matrice di viscosità, \mathbf{M} la matrice delle masse, $\mathbf{u}[t]$ il vettore degli spostamenti, $\mathbf{f}[t]$ il vettore delle forze e si è indicato con il punto la derivazione rispetto al tempo.

- La validità di questa approssimazione è legata ad una scelta appropriata delle matrici \mathbf{M} , \mathbf{K} e \mathbf{C} “equivalenti”. Generalmente si fa questa scelta:
 - \mathbf{M} è definita in base all'effettiva distribuzione di masse.
 - \mathbf{K} è presa pari alla matrice elastica iniziale.
 - \mathbf{C} è scelta in modo da produrre la stessa dissipazione energetica fornita dal meccanismo isteretico interno.
- L'obiettivo resta quello di ottenere, a parità di sollecitazione esterna, la stessa risposta massima che si produrrebbe nella struttura reale a comportamento isteretico.

Osservazioni sul sistema lineare equivalente

- La rigidità della struttura varia in funzione dell'escursione in campo plastico. Una rigidità "equivalente" costante e pari a quella elastica iniziale corrisponde quindi ad una approssimazione comunque molto rozza.
- Il meccanismo dissipativo reale della struttura è legato all'aria del ciclo di isteresi e quindi all'ampiezza di escursione in campo plastico, e non alla velocità con cui il ciclo viene percorso. Riferirsi ad una dissipazione legata alla velocità e non alla escursione, rende quanto meno ambiguo il concetto di equivalenza.
- Già alla nascita di questo concetto (Housner 1959, Iwan 1962), vi erano forti dubbi su una sua accettabile definizione, da parte degli stessi ricercatori che la proponevano, anche nel caso semplicissimo di oscillatore elementare ad un grado di libertà.
- Nel caso di strutture a più gradi di libertà, si aggiunge una ulteriore complicazione dovuti ad una differenza qualitativa tra i due comportamenti. Infatti, mentre la risposta "equivalente" lineare presenta comunque modi di vibrazione disaccoppiati, ciascuno dei quali è in rapporto diretto con la sola eccitante esterna, la risposta nonlineare è caratterizzata da forte accoppiamento modale e presenza di fenomeni caotici.

Vibrazioni libere in un sistema lineare

Lo studio della risposta dinamica è condotto discutendo preliminarmente il problema di *vibrazioni libere non dissipative* retta dall'equazione omogenea

$$\mathbf{K} \mathbf{u}[t] + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}[t] = \mathbf{0}$$

la cui soluzione può essere ottenuta in funzione degli autovettori \mathbf{y}_i , ed degli autovalori ω_i^2 , del problema generalizzato agli autovalori:

$$\mathbf{K} \mathbf{y} + \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Quest'ultimo, per $\mathbf{K} > \mathbf{0}$ ed $\mathbf{M} \geq \mathbf{0}$ simmetriche di ordine n , ammette n soluzioni distinte \mathbf{y}_i , $i = 1 \dots n$ caratterizzate dalle condizioni di biortogonalità:

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{y}_i^T \mathbf{K} \mathbf{y}_j = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Gli autovettori \mathbf{y}_1 costituiscono una base per lo spazio delle variabili. Pertanto, introducendo le ampiezze modali $w_i[t]$, la soluzione $\mathbf{u}[t]$ del problema dinamico può essere espansa in questa base e l'equazione vettoriale si riduce ad un sistema disaccoppiato di equazioni scalari.

$$\mathbf{u}[t] := \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i w_i[t] \implies \ddot{w}_i + \omega_i^2 w_i = 0, \quad i = 1 \dots n$$

Soluzione per sovrapposizione modale

- La soluzione generale della singola equazione è rappresentabile nella forma:

$$w[t] = \bar{w}_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

dove le costanti \bar{w}_i e ϕ_i sono definite dalle condizioni iniziali.

- Pertanto la soluzione del problema di vibrazioni libere non smorzate è rappresentabile nella forma:

$$\mathbf{u}[t] := \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \mathbf{y}_i$$

che può leggersi come sovrapposizione di n contributi, ciascuno dei quali ha andamento sinusoidale con periodo $T_i = 2\pi / \omega_i$, forma modale \mathbf{y}_i , ampiezza \bar{w}_i e fase ϕ_i .

- Le quantità \mathbf{y}_i ed ω_i sono chiamate, rispettivamente, *modi* e *frequenze proprie* di vibrazione del sistema. Le quantità \bar{w}_i e ϕ_i sono determinate in accordo con le condizioni iniziali.

Vibrazioni forzate

- Generalmente si assume che anche la matrice di viscosità \mathbf{C} , come la \mathbf{M} e la \mathbf{K} , sia “disaccoppiabile”, cioè che risulti:

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{C} \mathbf{y}_j = \nu_i \omega_i \delta_{ij}$$

dove $\nu_i \geq 0$ rappresenta il *fattore di smorzamento* associato al modo i -esimo, da valutare in funzione proprietà dissipative del sistema.

- In tali condizione l'analisi per disaccoppiamento modale può essere facilmente estesa alla presenza di forze viscosi e di eccitazione esterna. Si ottiene infatti:

$$\ddot{w}_i + \nu_i \omega_i \dot{w}_i + \omega_i^2 w_i = a_i[t]$$

dove la componente forzante $a_i[t]$ è definita dalla:

$$a_i[t] := \mathbf{y}_i^T \mathbf{f}[t]$$

- L'assunzione di \mathbf{C} disaccoppiabile semplifica l'algoritmo di soluzione ed è conveniente in ragione delle ambiguità presenti nella definizione di \mathbf{C} . In sua assenza, la soluzione sarebbe espressa da coppie complesse coniugate e fornirebbe modi sinusoidali la cui forma oscilla anche essa in modo sinusoidale.

Soluzione in termini di escursione massima

La soluzione della singola equazione modale:

$$\ddot{w}_i + \nu_i \omega_i \dot{w}_i + \omega_i^2 w_i = a_i[t]$$

può essere condotta con gli strumenti standard del calcolo differenziale. In particolare, la massima escursione

$$\bar{w}_i := \max\{w_i[t]\}$$

raggiunta da un modo inizialmente in quiete, può essere espresso nella forma:

$$\bar{w}_i = \frac{\bar{a}_i}{\omega_i^2} f_r[\omega_i, \nu_i, c_i[t]]$$

dove $\bar{a}_i := \max\{a_i[t]\}$ rappresenta il massimo valore raggiunto dall'eccitazione modale $a_i[t]$ ed $f_r[\dots]$ è il *fattore di amplificazione della risposta* funzione della frequenza ω_i e dello smorzamento ν_i del sistema e dell'andamento temporale della forzante $a_i[t]$.

Dinamica sismica

In presenza di eccitazione sismica, l'equazione dinamica può essere scritta nella forma

$$\mathbf{K} \mathbf{u}[t] + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}[t] + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}[t] = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_g$$

dove \mathbf{u} rappresenta lo spostamento relativo della struttura ed $\ddot{\mathbf{u}}_g$ lo spostamento rigido prodotto dal moto alla base della struttura:

$$\ddot{\mathbf{u}}_g = \bar{\mathbf{u}} \ddot{w}_g$$

Si ottiene il sistema disaccoppiato:

$$\ddot{w}_i + \nu_i \omega_i \dot{w}_i + \omega_i^2 w_i = a_i[t] := f_{pi} \ddot{w}_g$$

dove f_{pi} è il cosiddetto *fattore di partecipazione*, definito dalla:

$$f_{pi} := \mathbf{y}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}$$

In termini di valori massimi dell'ampiezza modale si ha quindi:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{\omega_i^2} f_{pi} S[T_i], \quad S[T_i] := f_{ri} \ddot{w}_{gmax}$$

dove **l'accelerazione spettrale $S[T_i]$ condensa tutta l'informazione sull'azione sismica.**

Il metodo dello spettro di risposta

L'analisi modale fornisce la base per il **Metodo dello Spettro di Risposta** proposto da Clough e Wilson nei primi '60 ed ancora largamente utilizzato nella verifica sismica. Il metodo si basa sulle seguenti considerazioni:

- La risposta della struttura è generalmente condizionata da pochi **modi principali caratterizzati da fattori di partecipazione f_{pi} significativi**. Il contributo dei modi secondari, a bassa partecipazione, è irrilevante. L'errore introdotto può essere valutato dalla percentuale di massa eccitata

$$m_e^2 := f_{p1}^2 + f_{p2}^2 + \dots + f_{pn}^2 \leq 1 \quad , \quad n \ll N$$

Risulta tanto più basso quanto più m_e si avvicina all'unità.

- Spesso (per strutture intelaiate soggette ad azione sismica orizzontale), **i modi principali sono anche quelli a periodo più alto**, usualmente i primi ad essere forniti dagli algoritmi di soluzione.
- Siamo ancora lontani dal disporre di caratterizzazioni dettagliate dell'azione sismica. L'uso di un fattore sintetico come l'accelerazione spettrale $S[T_i]$ è conveniente, anche in quanto **adatto all'uso in sistemi normativi**.
- Il metodo può tener conto del comportamento nonlineare attraverso un parametro sintetico, il **fattore di struttura q** correlato alla tipologia della costruzione, ed alle caratteristiche dei materiali.

Il fattore di struttura

Il metodo dello spettro di risposta fa riferimento ad un sistema elastico lineare con dissipazione viscosa. Il suo uso in ingegneria sismica richiede quindi qualche commento.

- Sotto le forti oscillazioni prodotte dal sisma, le strutture hanno comportamento non lineare e sviluppano cicli di isteresi. La dissipazione così prodotta tende a smorzare le oscillazioni ed ad allungarne il periodo.
- Questo insieme di fenomeni, peraltro complessi e fortemente influenzati dalla duttilità dei materiali, è messo in conto attraverso un **fattore di struttura** $q > 1$ che agisce essenzialmente come riduttore della risposta.
- Il fattore sintetizza proprietà diverse della struttura che ne condizionano la capacità di assorbire forti deformazioni in campo anelastico e ne caratterizzano le caratteristiche dissipative complessive.
- Resta di difficile valutazione, anche se il riscontro con i danni prodotti da eventi sismici trascorsi può fornire utili indicazioni al riguardo.
- Un supporto alla scelta può essere dato, come suggerito dalla normativa, da una correlazione euristica con la geometria e tipologia della costruzione (regolarità o meno in pianta ed in altezza, struttura a telai o a setti portanti ed altro).

Combinazione delle azioni modali

L'analisi modale fornisce la massima risposta, sia in termini di spostamento che di sollecitazione, che si attiva nel singolo modo di vibrazione a seguito dell'azione sismica. Resta da chiarire come le singole risposte modali debbano sovrapporsi per definire la risposta complessiva utile ai fini delle verifiche di sicurezza.

- I singoli modi hanno frequenze ω_i diverse ed i valori massimi della risposta non sono attinti contemporaneamente. Una combinazione basata sulla somma in valore assoluto dei valori modali delle singole componenti della risposta è quindi da ritenersi largamente sopravvalutata.
- Già nei primi '60 Wilson proponeva la regola di combinazione SRSS e, più tardi (nei primi '80) la CQC, in cui il valore di verifica s_v di ciascuna componente di sollecitazione è ottenuta attraverso la formula.

$$s_v^2 = \sum_{i=1}^n Q_{ij} s_i s_j, \quad i, j = 1 \dots n$$

dove s_i sono i singoli valori modali e i fattori Q_{ij} definiscono la correlazione mutua tra i modi i e j : in assenza di correlazione ($Q_{ij} = \delta_{ij}$) si ottiene la regola SRSS; per piena correlazione ($Q_{ij} = 1$) la somma dei valori assoluti.

Considerazioni sulla combinazione modale

- La regola di combinazione quadratica CQC (o SRSS) è direttamente mutuata dalla acustica e dalla teoria dei segnali. In questo quadro, il moto del singolo modo è visto come un processo random di tipo gaussiano ed le componenti modali della sollecitazione come valori frattili. Sappiamo che la combinazione di più processi gaussiani è ancora un processo gaussiano e che sia lo scarto quadratico medio che i valori frattili. sono ricavati da una combinazione quadratica dei valori corrispondenti nei singoli processi della combinazione.
- Questi risultati fanno riferimento a processi oscillatori con frequenze dell'ordine dei Khz e dei Mhz ed a durate di migliaia di cicli: sono quindi riferiti a processi a regime. Il moto sismico è invece caratterizzato da frequenze di qualche Hertz e da durate dell'ordine della decina di secondi. In questo contesto la risposta transiente acquista molta maggiore importanza.
- Il fatto, ha ovvi riflessi sulla taratura del fattore di accelerazione spettrale $S[T_i]$, che ne dovrebbe tener conto, ed influenza la correlazione Q_{ij} tra i modi di vibrazione che dovrebbe aumentare avvicinandosi alla unità per moti con frequenza elevata rispetto quelle dell'eccitante. Questo aspetto è di solito trascurato, anche in relazione al ruolo secondario che questi modi spesso (ma non sempre) hanno nella risposta.

Ulteriori considerazioni

- Il metodo dello spettro di risposta rappresenta lo strumento principe, più largamente utilizzato, di verifica sismica, capace di fornire un approccio sintetico ma basato su una descrizione dinamica articolata. Presenta tuttavia elementi di debolezza, in particolare, il modo troppo sommario di introdurre la duttilità strutturale solo attraverso un fattore euristico q di non agevole calibrazione
- Più recentemente alcuni ricercatori, fra cui lo stesso Wilson, hanno avanzato critiche al metodo con l'accusa di sopravvalutare, a volte anche pesantemente, le sollecitazioni di verifica e di utilizzare modalità di combinazione dei contributi modali, basate su somme di valori assoluti e quindi incoerenti sul piano meccanico.
- In effetti, nella formulazione iniziale del metodo, ciascuna componente scalare della sollecitazione veniva ottenuta applicando separatamente la regola CQC ai corrispondenti contributi modali e è quindi assunta con entrambi i segni più e meno. Tuttavia, se nella verifica intervengono insieme più componenti scalari, questo modo di procedere mette insieme i valori estremi di ciascuna componente, fra loro non contemporanei, e porta ad una condizione di verifica incoerente sul piano della meccanica e troppo restrittiva.
- Questo è parte di un problema più generale legato alla combinazione delle azioni, spesso trascurato o affrontato solo in modo troppo semplicistico anche se resta un aspetto rilevante ai fini delle verifiche.

La verifica per combinazioni di carichi.

- La normativa italiana, ma anche gli Eurocodici e gran parte delle normative extra-europee, assegna a ciascun Stato Limite di Verifica considerato, un appropriato scenario di carico definito dalla formula seguente

$$P = \gamma_i \psi_i P_i + \sum_k \gamma_k \psi_k P_k + P_s, \quad i, k = 1 \dots n$$

dove i e k sono indici che individuano la singola condizione di carico fra le n considerate, P_i rappresenta la condizione principale della combinazione, P_k quella assunta come secondaria, γ_i (e γ_k) sono fattori di amplificazione compresi fra un minimo γ_{im} (o γ_{km}) ed un massimo γ_{ix} (o γ_{kx}), mentre i fattori ψ_i e ψ_k sono definiti dalle probabilità di presenza concomitante delle diverse condizioni. Per ultima, P_s rappresenta l'azione sismica definita dalla combinazione CQC.

- Anche tralasciando il termine P_s e considerando i soli carichi statici, è rilevante il numero totale m delle combinazioni possibili che cresce esponenzialmente (pur limitandosi ai soli valori estremi dei γ_k , si ha $m = n 2^{n-1}$ per ogni Stato Limite). La presenza dei contributi dinamici aggrava le difficoltà, sia per il numero di modi da considerare che per la regola di combinazione più articolata.
- Esaminare tutte le possibili combinazioni diventa ovviamente improponibile. Peraltro, selezionare quelle potenzialmente critiche non è agevole.

Strategie possibili ma non efficaci a superare le difficoltà.

Sono spesso utilizzate due strategie:

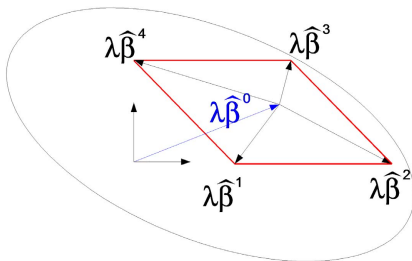
- La prima consiste nell'affidare l'onere della selezione all'utente, che dovrà fornire una lista di possibili combinazioni, elencando le azioni da mettere in conto, insieme al valore e segno del fattore di combinazione. Questo modo di operare è coerente sul piano meccanico ma diventa improponibile all'aumentare della complessità della struttura e del numero di condizioni di carico, a meno che non ridurre drasticamente la lista di combinazioni, con il rischio di tralasciare quelle realmente critiche. Peraltro, la procedura non si presta ad essere utilizzata in presenza di azioni sismiche, caratterizzate da regole di combinazione più complesse.
- La seconda strategia si rifà essenzialmente alle procedure di combinazione utilizzate nel metodo dello spettro di risposta. Ciascuna componente scalare s della sollecitazione viene in effetti ricavata separatamente attraverso la formula

$$s = \gamma_i \psi_i s_i + \sum_k \gamma_k \psi_k s_k + s_s$$

che è ottenuta mutuando la regola di combinazione delle azioni. Come già detto in relazione alla regola CQC, questo modo di operare si rivela incoerente, in quanto mette insieme nella verifica componenti di sollecitazioni non contemporanee, e può portare ad una forte sopravvalutazione della sollecitazione.

Interpretazione geometrica del problema.

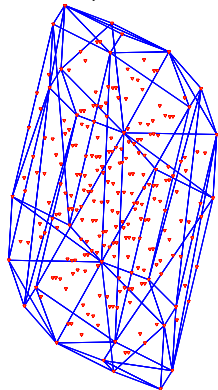
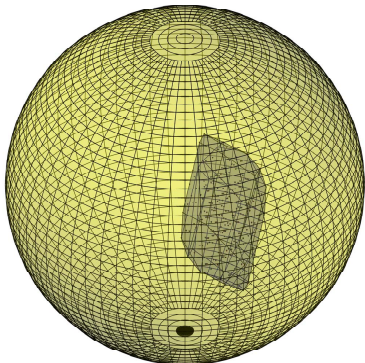
- E' importante poter individuare, in corrispondenza a ciascuna sezione di verifica, le combinazioni potenzialmente più restrittive nell'insieme totale di quelle possibili.
- Non sarà difficile se riflettiamo sulla geometria del problema.
- In figura è rappresentato il caso di soli due carichi, ciascuno variante da un minimo ad un massimo, ed è indicato sia il dominio elastico della struttura (l'ellisse) che il dominio di inviluppo dei carichi (il rombo) nello spazio 2d dei due carichi.



- la verifica deve controllare che il secondo sia contenuto nel primo;
- il dominio elastico è convesso, quindi basta controllare i 4 vertici;
- nel caso di 3 carichi, si avrebbe l'analogo in 3d e, in generale, per N carichi l'analogo in Nd ;
- il numero di vertici da considerare cresce con 2^N .

Il problema nello spazio delle sollecitazioni.

- il problema in parte si semplifica se viene visto nello spazio delle sollecitazioni che intervengono nella singola verifica. Il numero di vertici da verificare resta immutato ma si lavora in uno spazio a più bassa dimensione (spesso 3d).

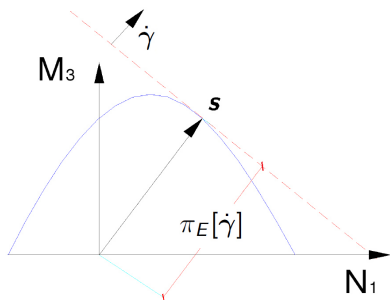


- In questa rappresentazione ciascun vertice è rappresentato da un punto (in rosso).
- La verifica controlla che tutti i vertici siano contenuti nel dominio elastico (la sfera in figura) ma, ovviamente, i vertici interni al convesso di involucro (il politopo in azzurro), sicuramente ininfluenti, potrebbero essere scartati a-priori.

La funzione di supporto.

- Un dominio convesso può essere definito attraverso la funzione di supporto. Nel nostro caso, dove il dominio è quello elastico \mathcal{D}_e e lo spazio in cui è immerso è quello delle sollecitazioni \mathbb{S} , la funzione è definita dalla

$$\pi_E[\dot{\gamma}] := \max\{\dot{\gamma}^T \mathbf{s} : \mathbf{s} \in \mathcal{D}_e\}$$



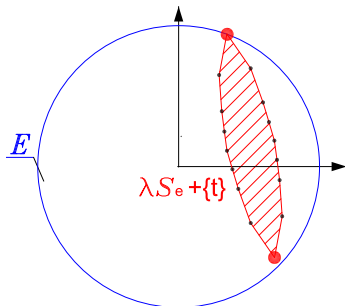
- $\dot{\gamma}$ rappresenta la deformazione associata alla sollecitazione \mathbf{s} e $\pi_E[\dot{\gamma}]$ il lavoro delle due;
- I rapporti con la disuguaglianza di Drucker sono evidenti;
- La funzione può essere utilizzata per selezionare i soli vertici potenzialmente attivi, individuati al variare di $\dot{\gamma}$ dalla condizione

$$f[\dot{\gamma}] = \max\{\dot{\gamma}^T \mathbf{s}_k\}, \quad k = 1 \dots m$$

- In concreto, si può operare con una scansione discreta $\dot{\gamma}_j, j = 1 \dots M$ e segnare come potenzialmente attivi i soli vertici \mathbf{s}_j individuati da almeno un $\dot{\gamma}_j$.

Alcune considerazioni sulla selezione dei vertici attivi.

- Abbiamo visto come la funzione di supporto consenta di filtrare, nell'insieme delle possibili sollecitazioni, i vertici interni al convesso di involuppo.
- Non tutti i vertici selezionati come potenzialmente attivi, possono tuttavia effettivamente attivarsi come critici rispetto alla verifica.
- Con occhio alla figura, dove sono indicati il dominio elastico, l'involuppo delle sollecitazioni ed i vertici potenzialmente attivi, possiamo osservare:



- tipicamente, l'involuppo presenta una forma sensibilmente allungata;
 - ciò è in relazione con la presenza nella sollecitazione di componenti prevalenti, soggette a maggiore variabilità;
 - in tali condizioni solo pochi vertici sono realmente critici (in figura, i 2 in rosso);
 - questi ultimi sono anche quelli individuati più facilmente al variare della direzione $\dot{\gamma}$, anche se si utilizza una scansione rada.
- In relazione alla combinazione sismica, questo uso della funzione di supporto corrisponde ad una implementazione efficiente dell'*involuppo ellittico* proposto da Menun, e Der Kiureghian (2000).

Uno schema per la selezione delle sollecitazioni di verifica.

Le considerazioni precedenti consentono di individuare una possibile procedura per selezionare, nell'involuppo complessivo delle sollecitazioni, quelle realmente critiche da sottoporre a verifica.

- Si parte assegnando un insieme di possibili deformazioni $\dot{\gamma}_j$, $j = 1 \dots M$, scelte in modo da realizzare una scansione opportuna nello spazio \mathbb{S} .
- Possiamo associare ad ogni $\dot{\gamma}_k$ lo la funzione scalare

$$f_j := \max\{\dot{\gamma}_j^T \mathbf{s}\} = \max\{\gamma_i \psi_i (\gamma_j^T \mathbf{s}_i) + \sum_{k=1}^N \gamma_k \psi_k (\gamma_j^T \mathbf{s}_k) + (\gamma_j^T \mathbf{s}_s)\}$$

- La funzione rappresenta una combinazione di contributi che ha la stessa struttura di quella delle sollecitazioni \mathbf{s}_k , ma essendo questi non più vettori multicomponente ma solo valori scalari la selezione del massimo è ora banale. Si ottiene

$$f_j = \sum \alpha_{ji} f_{ji} + \sum \alpha_{jk} f_{jk}, \quad i = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots M$$

dove la prima somma comprende le N azioni statiche, l'altra gli M contributi modali.

- Possiamo ora associare a ciascuna elemento $\dot{\gamma}$ della scansione la sollecitazione

$$\mathbf{s}_j = \sum \alpha_{ji} \mathbf{s}_i + \sum \alpha_{jk} \mathbf{s}_k$$

- Per questa via si ottiene un numero molto ristretto di sollecitazioni che comprende tuttavia quelle potenzialmente più critiche.

Riferimenti



[1951] J. L. Alford, G. W. Housner, R. R. Martel,
Spectrum Analysis of Strong-Motion Earthquakes,
Earthquake Research laboratory, California Institute of Tecnology



[1962] R. W. Clough
Earthquake Analysis by Resposne Spectrum Superposition
Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 52, n° 3



[1972] K. J. Bahte, E. L. Wilson
Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis
Journal of the Engineering Mechanics Division, 1972, Vol. 98, Issue 6, pp. 1471-1485



[1993] H.A. Smith, D.C. Sorensen, R.K. Singh
A lanczos-based technique for exact vibration analysis of skeletal structures
Int. J. Numerical Methods in Engineering , vol.36, pp. 1987-2000



[2000] C. Menun, A. Der Kiureghian
Envelopes for seismic response vectors. i: theory; ii:application
J. Struct Eng New York (NY) 2000;126(4): 467-473, 474-481



[2015] L. Leonetti, R. Casciaro, G. Garcea
Effective treatment of complex statical and dynamical load combinations within shakedown
analysis of 3D frames
Computers & Structures

Il metodo degli elementi finiti

Una introduzione rapida al metodo ed al suo uso nella progettazione antisismica

Raffaele Casciaro

professore emerito di Scienza delle Costruzioni
Università della Calabria
<http://www.labmec.unical.it>

Newsoft s.a.s. - Cosenza
<http://www.newsoft-eng.it>

rcasciaro@gmail.com - raffaele.casciaro@unical.it
https://www.researchgate.net/profile/Raffaele_Casciaro

Ordine degli Ingegneri Roma - giugno 2017

Obbiettivi della presentazione

- Il metodo degli Elementi Finiti, in inglese "Finite Element Method" o FEM, insieme alla disponibilità di macchine da calcolo sempre più potenti, rappresenta lo strumento più importante e diffuso nell'ingegneria strutturale, l'unico in grado di affrontare l'analisi di strutture sempre più impegnative, e di dare risposte concrete ad inquadramenti teorici sempre più sofisticati.
- Si vuole in questa sede, sia pur sinteticamente, tracciarne l'evoluzione, presentarne le caratteristiche principali e descriverne alcune delle metodologie di soluzione.
- Dati i limiti temporali della presentazione, ci si soffermerà solo su alcuni aspetti dell'analisi nonlineare al passo, dato l'interesse che questa riveste nella verifica sismica pushover.

Una breve storia dell'approccio FEM

Proprio in quanto nasce dall'aspirazione a conoscere in dettaglio il comportamento delle opere di ingegneria, il metodo FEM ha origini antiche. Limitandoci a partire dalla metà del 1800, hanno contribuito allo sviluppo del metodo:

- i lavori di **Babbage** sulla Macchina Analitica, precursore degli odierni calcolatori;
- il coinvolgimento di **Menabrea** e l'approccio energetico sviluppato da **Castigliano** alla fine del 19° secolo;
- i lavori di **Ritz** e **Galerkin** su soluzioni approssimate attorno al 1920;
- lo sviluppo di tecniche di soluzione numerica iniziato a partire dal 1930, **Cross**, **Southwell**;
- i primi lavori da **Argyris** a metà degli anni '30;
- l'evoluzione, nella sua forma attuale, avvenuta nel corso della seconda guerra mondiale e nell'immediato dopoguerra;
- La diffusione dei risultati della ricerca a metà degli anni '50, **Argyris**, **Livesley**, **Turner**, **Clough**, e nei primi '60, **Wilson**, **de Veubeke**, **Pian**;
- la Conferenza tenuta alla *Wright-Patterson Air Force Base* nel 1965, che sancì ufficialmente la nascita del metodo.

Formulazione del metodo FEM

- L'idea centrale del metodo FEM è quella di riferirsi ad una formulazione energetica definita dalla condizione:

$$\Pi[\sigma, u] := -\Psi[\sigma] + \sigma \cdot \epsilon[u] - q \cdot u - \sigma \cdot \bar{\epsilon} = \text{stazionario}$$

dove u e σ indicano i campi di spostamento e tensione, variabili del problema, u e $\bar{\epsilon}$ sono il carico esterno e le distorsioni impresse, termini noti del problema, $\epsilon[\sigma]$ è il campo di deformazione associato allo spostamento u e la funzione $\Psi[\sigma]$ è l'energia associata alla tensione σ (*Energia Complementare*).

- Generalmente, le quantità introdotte σ , u , ϵ , u , q e $\bar{\epsilon}$ sono campi definiti su un dominio multidimensionale e quindi sia le funzioni $(\cdot)[\cdot]$ che i termini bilineari $(\cdot) \cdot (\cdot)$ sono espressi da integrali. In questi termini la condizione di stazionarietà dà origine a sistemi di equazioni differenziali difficilmente gestibili; si preferisce pertanto di esprimere i campi in un numero finito di parametri in maniera da ridurre il problema in forma algebrica:

$$\Pi[\sigma, u] := -\Psi[\sigma] + \sigma^T \epsilon[u] - q^T u - \sigma^T \bar{\epsilon} = \text{staz.}$$

- Ovviamente la discretizzazione modifica il problema di partenza ma, se si opera in modo appropriato, l'errore introdotto resta accettabile.

Il problema elastico lineare

- Se la funzione $\varepsilon[\mathbf{u}]$ è lineare e l'energia $\Psi[\boldsymbol{\sigma}]$ è quadratica, si parla di *problema elastico lineare* ed il problema può risciversi

$$\Pi[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}] := -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{u} - \mathbf{q}^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{staz.}$$

dove le matrici \mathbf{H} e \mathbf{Q} , chiamate *matrice di flessibilità* e *matrice di equilibrio* sono definite in funzione della discretizzazione assunta. Risolvendo $\boldsymbol{\sigma}$ in termini di \mathbf{u} la condizione si semplifica ulteriormente nella

$$\Pi[\mathbf{u}] := \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{p}^T \mathbf{u} = \text{staz.}, \quad \mathbf{K} := \mathbf{Q}^T \mathbf{H} \mathbf{Q}$$

avendo introdotto la *matrice di rigidezza* \mathbf{K} ed incorporato in \mathbf{p} sia il carico esterno \mathbf{q} che l'effetto delle distorsioni $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

- La dimensione del problema (facilmente si superano le 10^4 variabili) rende molto onerosa la costruzione delle matrici, in generale. L'inconveniente viene superato, ed è questa la peculiarità del metodo, suddividendo il dominio di definizione del corpo in piccoli elementi di forma semplice ed utilizzando interpolazioni separate per gli spostamenti e le tensioni su ciascuno di questi.

Soluzione numerica del problema lineare e nonlineare

- La condizione variazionale discussa in precedenza, in termini di sole variabili spostamento o , come si dice, *in formato compatibile*, rappresenta la forma standard di presentare il metodo.
- Nel caso lineare, imponendo la stazionarietà si ottiene l'equazione vettoriale

$$s[\mathbf{u}] = \mathbf{p}, \quad s[\mathbf{u}] := \mathbf{K}_t \mathbf{u}$$

Dove il vettore s , legato linearmente ad \mathbf{u} attraverso la matrice \mathbf{K}_t rappresenta la cosiddetta *risposta strutturale*. La condizione si riduce quindi al sistema lineare

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}$$

la cui soluzione è ottenuta, con relativa facilità, mediante un algoritmo di decomposizione alla Cholesky che sfrutta pienamente alcune caratteristiche della \mathbf{K} quali simmetria, struttura bandata e disposizione sparsa degli elementi non nulli.

- Nel caso nonlineare, è ancora definita la risposta $s_i[\mathbf{u}]$ (anche se questa può assumere una forma sensibilmente più complicata) ed alla configurazione corrente \mathbf{u} , può ancora essere associata una **matrice di rigidezza tangente** $\mathbf{K}_t[\mathbf{u}]$ che svolge, in analisi nonlineare, un ruolo analogo a quello svolto della \mathbf{K} in analisi lineare.
- Si noti tuttavia che, mentre la \mathbf{K} resta costante per tutta l'analisi anche se questa è ripetuta con carichi diversi, la $\mathbf{K}_t[\mathbf{u}]$ varia con la configurazione \mathbf{u} e deve essere quindi costruita e decomposta nuovamente ogni volta che \mathbf{u} viene aggiornata.

Tipi diversi di elemento finito

Arrivare a definire un elemento finito non è banale in quanto, pur restando nel quadro delineato in precedenza, il numero delle possibili varianti resta sterminato.

- forma dell'elemento (triangolare, quadrangolare, ecc.) ?
- numero di variabili utilizzate per definire i campi di spostamento e tensione ?
- quali condizioni di continuità mantenere all'interfaccia fra elementi contigui ?
- ordine e forma delle funzioni di interpolazione adottate ?
- utilizzare o meno forme di integrazione numerica approssimata ? e quali ?
- ...

Possiamo in particolare distinguere:

- *elementi equilibrati*, in cui lo stato campo di tensione è scelto in modo da verificare identicamente le equazioni di equilibrio con i carichi esterni.
- *elementi compatibili*, in cui il campo di tensione è scelto in modo da corrispondere identicamente, attraverso il legame elastico, al campo di deformazioni $\epsilon[u]$.

Nel primo caso la condizione di stabilità corrisponde al principio di minimo dell'energia complementare totale; nel secondo al principio della minima energia potenziale totale. Altrimenti, più in generale, si parla di elementi misti.

Elementi finiti di tipo misto

- Entrambe le formulazioni equilibrata e compatibile, in quanto si richiamano ad un principio di minimo, possono essere trattati con una matematica più semplice (ad es. è facile caratterizzarne le proprietà di convergenza).
- In effetti, gli elementi equilibrati sono stati i primi ad essere utilizzati e quelli compatibili hanno rappresentato lo standard di fatto, fino a tutto il '90.
- Più di recente, si è incominciato a riconoscere che questa scelta pone limiti ingiustificati all'ottimizzazione dell'elemento e a rivolgere l'interesse verso formulazioni di tipo misto.
- Per intenderci, l'elemento misto 5β proposto da Pian e Sumihara nel 1984 resta ancora fra i migliori del suo genere ed è alla base dell'attuale sviluppo di alcuni elementi solidi 3d (brick) di nuova generazione.
- La formulazione di elementi ad alte prestazioni richiede di realizzare un compromesso sinergico tra esigenze anche molto diverse e dettagli anche piccoli possono fare la differenza (come nella buona cucina).

Ricette per un elemento efficiente

Una buona ricetta include generalmente i seguenti ingredienti (per quanto possibile):

- costruzione delle matrici mediante assemblaggio di contributi ottenuti separatamente, elemento per elemento;
- uso di formule analitiche esatte (ottenute da manipolatori algebrici) al posto di schemi di integrazione numerica per punti di Gauss;
- attenzione nell'evitare il locking dovuto ad incompatibilità fra le diverse interpolazioni;
- sfruttare, per quanto possibile, comportamenti super-convergenti;
- attenzione verso la risposta in tensioni e non solo verso quella in spostamento in modo da incorporare il più possibile le informazioni disponibili sulle soluzioni attese; in particolare:
 - armonizzare tra loro la discretizzazione delle tensioni e degli spostamenti,
 - privilegiare l'equilibrio più che la compatibilità nella definizione dei campi tensionali,
 - privilegiare le condizioni di continuità tra elementi contigui meccanicamente rilevanti (e solo quelle).

Nuovi modelli di continuo

La ricerca coinvolta dall'evoluzione delle tecnologie FEM hanno finito col mettere in luce l'inadeguatezza, in alcuni casi, dei modelli di continuo tradizionalmente utilizzati, ormai diventati obsoleti nel contesto delle nuove possibilità offerte dall'analisi. Ciò ha portato allo sviluppo di

- continui fibrati,
- continui generati mediante omogeneizzazione di aggregati strutturati, (murature, fibrorinforzati ecc..),
- continui a variabili interne,
- teoria generalizzata della trave (GBT),
- estensione del modello di Saint Venant,
- continui corotazionali,
- modelli di evoluzione del danno,
- modellazione multilivello,
-

ed, ovviamente, l'elenco è da considerare del tutto parziale.

L'analisi evolutiva al passo

- Il metodo degli elementi finiti è stato forse, negli ultimi 50 anni, il campo di ricerca più ampiamente investigato nell'ingegneria strutturale ed ha coinvolto migliaia di ricercatori. Ovviamente, una discussione anche veloce di tutti gli sviluppi del metodo va molto oltre la durata e gli obiettivi di questa presentazione.
- Ci limiteremo quindi ad esaminarne, sia pur brevemente, solo un aspetto legato alle modalità con cui viene condotta l'analisi in campo nonlineare. Discuteremo in particolare la strategia di analisi nota come **Analisi Evolutiva al passo** o, in inglese, **Path-Following Analysis**.
- Questa strategia di analisi, che tende a riprodurre, mediante simulazione numerica, l'evoluzione del comportamento di strutture soggette a carico variabile nel tempo, è stata utilizzata fin dai primi '60, prevalentemente in ingegneria aeronautica ed aerospaziale, ma ha di recente acquistato importanza anche nell'ingegneria civile.
- In effetti ci interessa in questa sede proprio in quanto rappresenta la base della **Analisi Pushover**, che svolge un ruolo importante nella progettazione antisismica.

Analisi lineare e nonlineare

- La principale differenza qualitativa tra l'analisi in campo lineare e nonlineare risiede nella perdita del principio di sovrapposizione degli effetti.
- In analisi lineare la risposta della struttura ad una combinazione di azioni diverse può essere ottenuta sommando le risposte separate corrispondenti a ciascuna delle azioni. Ciò comporta:
 - ovvia semplificazione nella gestione di condizioni di carico complesse;
 - garanzia che gli effetti prodotti da piccole perturbazioni nei carichi siano anche essi piccoli;
 - differenze piccole fra situazione reale e schema di calcolo, dovute a fluttuazione dei carichi, imperfezioni geometriche e difetti nei materiali, possono essere ignorati senza pregiudicare l'affidabilità dei risultati;
 - un'analisi basata su valori caratteristici può fornire valutazioni affidabili del soddisfacimento delle prescrizioni prestazionali e della sicurezza a collasso.
- Questo quadro non si mantiene più in campo nonlineare, almeno in generale. Sarà quindi necessario svolgere analisi separate per ciascuna delle possibili combinazioni di carico e variazioni nei parametri in gioco.
- L'analisi va ripetuta più volte e richiede un impegno notevole di calcolo, reso possibile solo dall'incremento delle prestazioni del hardware e dallo sviluppo di teorie e metodologie di calcolo sempre più potenti ed ottimizzate.

Soluzione iterativa alla Newton

- In analisi nonlineare il problema da risolvere si presenta generalmente nella forma

$$\mathbf{s}[\mathbf{u}] = \mathbf{p}$$

dove \mathbf{p} è l'azione esterna agente, termine noto del problema, ed $\mathbf{s}[\mathbf{u}]$ è la risposta statica della struttura corrispondente alla configurazione corrente \mathbf{u} .

- Come già detto, alla configurazione \mathbf{u} può essere associata la matrice di rigidità tangente $\mathbf{K}_t[\mathbf{u}]$, definita dalla variazione seconda della energia di deformazione $\Phi[\mathbf{u}]$

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_t[\mathbf{u}] \delta \mathbf{u} := \Phi[\mathbf{u}]'' \delta \mathbf{u}^2$$

La matrice fornisce una informazione completa dell'energia $\Phi[\mathbf{u}]$, nell'intorno di secondo ordine di \mathbf{u} , ed è usata per collegare piccoli incrementi di \mathbf{u} ai corrispondenti di \mathbf{s}

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{K}_t[\mathbf{u}] \dot{\mathbf{u}}$$

- La soluzione cercata può essere quindi ottenuta mediante iterazione alla Newton

$$\mathbf{u}_{j+1} := \mathbf{u}_j - \tilde{\mathbf{K}}[\mathbf{u}_j]^{-1} \mathbf{r}_j \quad , \quad \mathbf{r}_j := \mathbf{s}[\mathbf{u}_j] - \mathbf{p} \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

in cui \mathbf{r}_j è il residuo all'equilibrio in corrispondenza ad \mathbf{u}_j e \mathbf{u}_{j+1} è la iterata di \mathbf{u}_j .

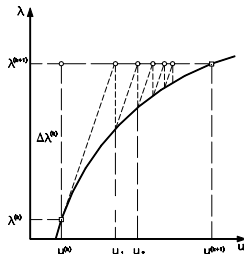
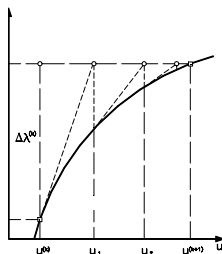
- Lo schema converge in modo quasi quadratico alla soluzione \mathbf{u} che azzerava l'equilibrio; tuttavia richiede che il valore di partenza \mathbf{u}_0 sia già sufficientemente vicino a quello di arrivo.

Convergenza dello schema di Newton

- Lo schema di Newton, nella forma descritta, richiede l'aggiornamento della matrice \mathbf{K}_t^{-1} a ciascun ciclo di iterazione. Questa operazione, che implica la costruzione e decomposizione alla Cholesky della matrice, corrisponde alla parte più onerosa dell'intero ciclo iterativo.
- Per questo motivo, lo schema viene usualmente implementato nella forma modificata

$$\mathbf{u}_{j+1} := \mathbf{u}_j - \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j$$

dove $\tilde{\mathbf{K}}$ è una approssimazione della $\mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j]$ mantenuta costante durante l'intero processo iterativo evitando l'aggiornamento continuo della matrice $\mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j]^{-1}$.



- La convergenza dello schema modificato è assicurata se sono verificate le condizioni

$$0 < \mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j] < 2\tilde{\mathbf{K}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

quindi non è garantita solo se la matrice tangente \mathbf{K}_t del problema perde la sua positività (perdita di stabilità) o se $\tilde{\mathbf{K}}$ sottostima, in una qualche direzione, la rigidezza effettiva $\mathbf{K}_t[\mathbf{u}]$ di un fattore eguale o superiore a 2.

Analisi path-following

- L'analisi evolutiva al passo o **Analisi Path-Following** rappresenta lo strumento più largamente più utilizzato in analisi nonlineare (per intenderci, la Pushover è una analisi Path-following).
- L'idea è quella di ricostruire il percorso di equilibrio $\mathbf{u}[\lambda]$ conseguente ad un assegnato processo di carico $\mathbf{p}[\lambda]$ attraverso una sequenza di punti di equilibrio $\{\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ sufficientemente vicini tra loro da fornire, per interpolazione, la curva di equilibrio definita dalla condizione implicita

$$\mathbf{s}[\mathbf{u}] - \mathbf{p}[\lambda] = \mathbf{0}$$

- Questo modo di procedere deve la sua popolarità ad un insieme di motivi:
 - Molti problemi nonlineari sono **anolonomi**, cioè la risposta non dipende solo dalla configurazione raggiunta ma anche dal percorso seguito per raggiungerla. In questi casi (plasticità, danneggiamento) è espressamente richiesto un approccio evolutivo.
 - Il fatto che si proceda a piccoli passi, e si possa sfruttare una estrapolazione dell'ultima soluzione raggiunta per ottenere una valutazione iniziale della soluzione al passo successivo, velocizza lo schema iterativo alla Newton.
 - Se si assume un processo di carico proporzionale $\mathbf{p}[\lambda] := \mathbf{p}_0 + \lambda\hat{\mathbf{p}}$, il parametro λ che ne regola l'evoluzione può essere interpretato come moltiplicatore di sicurezza associato alla condizione di carico $\hat{\mathbf{p}}$.
 - Durante il tragitto il comportamento della struttura può essere monitorato tracciandone le occorrenze significative (fessurazione, plasticizzazione, eccesso di deformazione, danneggiamento, collasso, ecc..).

Strategia incrementale a controllo di carico

La sequenza dei punti di equilibrio può essere costruita con strategie diverse. Quella a **controllo di carico** si sviluppa nei seguenti passi.

- Si assegnano successivi incrementi $\Delta\lambda$ al fattore di carico.
- Per ognuno di questi, note le soluzioni precedenti $\mathbf{u}^{(k)}$ e $\mathbf{u}^{(k-1)}$ viene costruita una stima iniziale per la soluzione successiva corrente $\{\lambda^{(k+1)}, \mathbf{u}^{(k+1)}\}$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta\lambda, \quad \mathbf{u}_0^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)})$$

- Si procede quindi a determinare $\mathbf{u}_0^{(k+1)}$ mediante iterazioni alla Newton.
- La matrice di iterazione $\tilde{\mathbf{K}}$ è definita in corrispondenza alla configurazione di inizio passo o, meglio, di prima estrapolazione.
- Se l'iterazione rallenta o perde convergenza (il fatto può essere sintomo che è stato raggiunto o superato carico di collasso) il processo iterativo è interrotto ed il passo viene ripetuto utilizzando un incremento $\Delta\lambda$ sensibilmente più piccolo.

Anche se largamente utilizzata in passato, la strategia presenta aspetti insoddisfacenti.

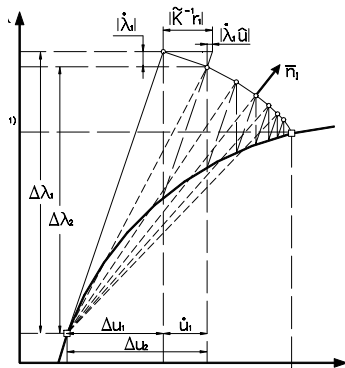
- risulta efficiente e robusta solo nella fase iniziale, a bassa non linearità, del processo di carico;
- tende a lavorare in zone a convergenza bassa o impossibile: quindi per larga parte in condizioni di bassa efficienza;
- non riesce ad operare in tratti orizzontali o discendenti della curva, e quindi a ricostruire fenomeni di collasso o danneggiamento, per noi generalmente di maggiore interesse;

Parametrizzazione del percorso di equilibrio

- Il non poter raggiungere e superare il carico limite, rappresenta un inconveniente grave. Lo è sicuramente per l'Ingegneria Civile, anche se meno per quella Aeronautica (culla del metodo FEM) più interessata alle verifiche a fatica.
- Per quanto possa apparire strano, per lungo tempo questo difetto è stato sopportato come caratteristica intrinseca, non sanabile, dell'approccio incrementale.
- Solo alla fine degli anni '70 (**Riks**) si è riconosciuto che le difficoltà derivavano banalmente della scelta del parametro di controllo (λ) utilizzato per l'evoluzione del percorso di equilibrio.
- In corrispondenza a punti limite, la funzione $\mathbf{u}[\lambda]$ non è analitica in λ e non deve quindi sorprendere che individuare la sequenza $\mathbf{u}^{(k)}$ attraverso incrementi $\Delta\lambda$ possa creare difficoltà.
- A questo punto la soluzione diventa ovvia. Gli inconvenienti riscontrati (difficoltà di convergenza nelle vicinanze del carico limite ed impossibilità a seguire la curva nei suoi tratti discendenti) dovrebbero sparire del tutto semplicemente utilizzando una diversa parametrizzazione per definire la curva di equilibrio.
- Come banalmente si fa in questi casi basta utilizzare una ascissa curvilinea che segua la curva in tutta la sua evoluzione.

Il metodo arc-length (Riks 1979)

- Si utilizza una parametrizzazione analitica $\{\mathbf{u}[\xi], \lambda[\xi]\}$, dove ξ è una ascissa curvilinea che descrive la curva di equilibrio nello spazio $\{\mathbf{u}, \lambda\}$, e si definisce la sequenza $\{\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ assegnando le ampiezze $\Delta\xi^{(k)}$ dei singoli archi di curva.



- Lo schema iterativo diventa:

$$\mathbf{u}_{j+1} := \mathbf{u}_j + \dot{\mathbf{u}}_j, \quad \lambda_{j+1} := \lambda_j + \dot{\lambda}_j$$

dove le correzioni iterative $\dot{\mathbf{u}}_j$ e $\dot{\lambda}_j$ sono ottenute come soluzione del sistema lineare

$$\mathbf{J}_j \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_j \\ \dot{\lambda}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_j \\ \mathbf{g}_j \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{J}_j := \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t[\mathbf{u}_j] & -\hat{\mathbf{p}} \\ \Delta\mathbf{u}_j^T \mathbf{M} & \mu \Delta\lambda_j \end{bmatrix}$$

- Ne risulta un sistema di $n + 1$ equazioni nonlineari nelle $n + 1$ incognite $\mathbf{u}^{(k+1)}$ e $\lambda^{(k+1)}$ che può essere risolto con iterazione alla Newton.
- il metodo di Riks presenta caratteristiche di convergenza sempre migliori di quella a controllo di carico; supera senza difficoltà i punti limite e segue agevolmente anche le zone discendenti del percorso di equilibrio.

Evoluzione del metodo arc-length

- La strategia "arc-length", la cui convenienza divenne subito evidente, acquistò rapidamente una grande popolarità generando un gran numero di articoli successivi con proposte di varianti, sia nella scelta della metrica utilizzata per definire l'ampiezza di passo che nei dettagli algoritmici che regolano l'estrapolazione iniziale, l'aggiornamento della matrice di iterazione e le opzioni di ripristino.
- Molte di queste erano dettate da occasionali (anche se frequenti) difficoltà di convergenza, spesso in corrispondenza a punti di carico limite. Le varianti all'algoritmo iniziale di Riks erano quindi essenzialmente rivolte (a torto) allo sviluppo di accorgimenti che meglio servissero ad aggirare le difficoltà di convergenza legate alla occorrenza di singolarità nella matrice \mathbf{K}_t .
- Successivamente (1998) si realizzò che l'inconveniente era dovuto ad un fenomeno di locking (locking da estrapolazione) che inficiava in realtà la condizione $\mathbf{K}_t < 2\tilde{\mathbf{K}}$.
- Il locking è tuttavia legato più alla descrizione in termini nonlineari della risposta $\mathbf{s}[\mathbf{u}]$ che a caratteristiche intrinseche di questa. E' quindi ancora una volta un problema di parametrizzazione.
- Modellazioni basate su un formato compatibile, dove la risposta $\mathbf{s}[\mathbf{u}]$ è descritta in termini di soli spostamenti, sono particolarmente sensibili al locking.
- Il locking è facilmente eliminato con schemi iterativi di tipo misto ottenendo così (con modifiche secondarie di codice) algoritmi di soluzione molto più veloci e robusti.

Analisi incrementale in plasticità

L'analisi evolutiva al passo alla Riks rappresenta la strategia attualmente più diffusa in ambito nonlineare. Il suo utilizzo in elasto-plasticità richiede tuttavia alcuni ulteriori chiarimenti:

- La formazione di nuove zone plastiche, o il ritorno in fase elastica di quelle già presenti, rende discontinua la matrice tangente $K_t[u]$.
- La presenza di salti nella $K_t[t]$ ne rende problematica la valutazione. Limita anche il miglioramento delle proprietà di convergenza di schemi iterativi alla Newton mediante una riduzione l'ampiezza del passo.
- Il legame elasto-plastico è per sua natura anolonomo. Quindi è impossibile, in linea di principio, definire un legame univoco che fornisca la risposta s in funzione delle sole condizioni iniziali e dello spostamento di fine passo u , ma anche da come il passo viene in realtà eseguito.
- Ciò crea problemi ad in approccio evolutivo al passo in cui la soluzione di fine passo è definita solo dalle condizioni iniziali e dall'incremento di carico.
- Una risposta a questa ambiguità è stata offerta dalla **Teoria dei Percorsi Estremali** (Ponter e Martin (1972)).
- La teoria consente di definire un legame olonomo coerente in grado di fornire non solo le tensioni ma anche gli incrementi di deformazione plastica raggiunti nel passo.

Teoria dei percorsi estremali

La teoria dei *percorsi estremali* sviluppata da Ponter e Martin nei primi anni '70 fornisce un contributo importante ai fini della definizione di uno schema path-following meccanicamente coerente in plasticità. La teoria fornisce, per materiali alla Drucker, i seguenti risultati:

- Fra tutti i percorsi elasto–plastici incrementali che partono da assegnati campi iniziali σ_0 ed ε_0 , esistono dei percorsi estremali tali da realizzare contemporaneamente il massimo lavoro complementare (a parità di tensione finale σ_1 raggiunta) ed il minimo lavoro di deformazione (a parità di deformazione finale ε_1 raggiunta).
- L'uso dei percorsi estremali fornisce un legame olonomo nel passo che, indicando con indice 1 e 2 due generiche soluzioni di fine passo, soddisfa le condizioni:

$$0 \leq (\sigma_2 - \sigma_1)^T (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \leq (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^T \mathbf{E} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

- Per materiali elasto–plastici perfetti la soluzione è estrema di fine passo è individuata dal principio classico di Haar–Karman.

Ovviamente, assumere che ciascun passo sia condotto lungo un percorso estrema rende olonoma la relazione tra deformazioni e tensioni di fine passo e quindi meccanicamente coerente l'approccio path-following.

Soluzione di Haar–Karman

Il principio di Haar–Karman (1908) afferma:

“La soluzione elasto–plastica minimizza l’energia complementare totale del sistema sotto le condizioni di equilibrio e di ammissibilità plastica”.

In ragione dei nostri obiettivi, ottenere cioè $\mathbf{s}[\mathbf{u}]$ una volta che sia assegnato \mathbf{u} , il principio è utilizzato come segue:

1 Predittore elastico

Si introduce $\boldsymbol{\sigma}_E$:

$$\boldsymbol{\sigma}_E := \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon} := \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}]$$

come soluzione elastica corrispondente allo stato iniziale $\boldsymbol{\sigma}_0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ ed allo spostamento assegnato \mathbf{u} .

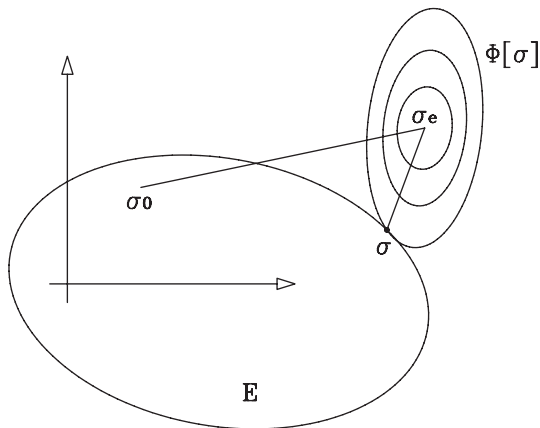
2 Rientro plastico

La soluzione elasto–plastica $\boldsymbol{\sigma}$ è fornita dal principio HK che, nell’attuale contesto, diventa

$$\Pi[\boldsymbol{\sigma}] := \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_E)^T \mathbf{E}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_E) dv = \text{minimo}$$

sotto la condizione che $\boldsymbol{\sigma}$ sia equilibrata e plasticamente ammissibile.

Schema geometrico della soluzione di Haar–Karman



La soluzione Haar-Karman si presenta come problema standard di programmazione quadratica, banale per le ridotte dimensioni e facilmente risolvibile con algoritmi QP. In molti casi di interesse pratico la soluzione è direttamente ottenuta in forma chiusa.

Schema iterativo arc-length

Lo schema iterativo può essere condotto nella sua variante semplificata

$$\begin{cases} \lambda_{j+1} = \lambda_j - \mathbf{r}_j^T \hat{\mathbf{u}} / \hat{\mathbf{p}}^T \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_j + (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \hat{\mathbf{u}} \end{cases}$$

dove $\tilde{\mathbf{K}}$ è assunta costante per tutti i passi e pari alla matrice di rigidezza elastica iniziale \mathbf{K}_E ed $\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{p}}$ corrisponde alla soluzione elastica iniziale.

- 1 Sia la matrice $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$ che il vettore $\hat{\mathbf{u}}$ sono costruiti, una volta per tutte, all'inizio del processo, quindi con un forte risparmio computazionale.
- 2 Le condizioni di convergenza dello schema:

$$0 < \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}} < 2 \dot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{u}} \quad , \quad \forall \dot{\mathbf{u}} : \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{p} = 0$$

sono identicamente soddisfatte in quanto, per la teoria dei percorsi estremali si ha

$$0 \leq \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}} \leq \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}}$$

e, d'altro canto, può essere $\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}} = 0$ solo se $\dot{\mathbf{u}}$ è un meccanismo di collasso, ma in tal caso risulta

$$\hat{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\lambda_c} \int_B \sigma_c^T \dot{\epsilon}_c dv > 0$$

Schemi basati sulla costruzione della matrice tangente

Lo schema descritto è molto robusto ed efficiente. Sono possibili tuttavia delle varianti essenzialmente basate su un approccio al Newton non modificato, che utilizzano come matrice di iterazione la matrice tangente $K_t[\mathbf{u}]$, con l'idea di accelerare così la convergenza del processo.

Questo approccio è tuttavia non conveniente:







- 1 $K_t[\mathbf{u}]$ è funzione della soluzione corrente \mathbf{u} ma anche dell'incremento atteso $\dot{\mathbf{u}}$, ed è di difficile costruzione.
- 2 L'aggiornamento continuo della inversa K_t^{-1} (ad ogni passo ed ad ogni loop del passo) risulta estremamente oneroso.
- 3 La funzione $K_t[\mathbf{u}]$ non è continua; viene meno pertanto il presupposto base dell'algoritmo di Newton che assicura una convergenza quasi-quadratica.
- 4 Non vi è nessuna garanzia di convergenza del processo iterativo, anche assumendo passi molti piccoli. Spesso lo schema tende a perdere convergenza.
- 5 È pertanto necessario l'uso di strategie di supporto (ripristino, riduzione della lunghezza di passo, controllo sull'entità della correzione iterativa, ed altro), complesse sul piano della logica algoritmica, non sempre affidabili ed in ogni caso computazionalmente dispendiose.

Analisi limite e shakedown

La soluzione incrementale risulta in effetti molto efficiente, tanto da risultare conveniente anche se non siamo interessati a descrivere la curva di equilibrio, ma soltanto a valutare il moltiplicatore di collasso.

- Il moltiplicatore di collasso è definito dai teoremi dell'analisi limite e può essere ottenuto come soluzione di un problema di ottimizzazione su un insieme convesso utilizzando gli algoritmi standard sviluppati per questo contesto.
- I più recenti fra questi, basati sull'approccio **interior point** sono in realtà molto robusti ed efficienti e possono essere usati in forma di solutore esterno standard per problemi di analisi limite.
- Vi sono tuttavia forti analogie tra questi algoritmi e la strategia evolutiva arc-length. Tanto che questa seconda ne può essere vista come una implementazione dedicata e quindi potenzialmente più conveniente.
- Schemi incrementali analoghi al path-following sono anche utilizzabili nell'analisi ad adattamento (shakedown) e, anche in questo caso possono essere visti come implementazioni dedicate, particolarmente efficienti, dell'algoritmo interior-point.

Riferimenti

-  O. C. Zienkiewicz
The finite element method.
London : McGraw-Hill, 1977
-  [1973] G. Strang, G. J. Fix
An analysis of the finite element method
Wellesley-Cambridge Press. Distributed by SIAM.
-  [1976] K. J. Bahte, E. L. Wilson
Numerical Methods in Finite Element Analysis
Prentice-Hall inc. Englewood Cliffs, New Jersey
-  [1991] F. Brezzi, M. Fortin
Mixed and Hybrid Finite Element Methods
Springer Series in Computational Mathematics
-  [2005] T. H. H. Pian, CC Wu
Hybrid and Incompatible Finite Element Methods
Taylor & Francis Inc
-  [1984] T. H. H. Pian, K. Sumihara
Rational approach for assumed stress finite elements
Numerical Methods in Engineering

Riferimenti



[1972] A.R.S. Ponter, G.B. Martin

Some extremal properties and energy theorems for inelastic materials and their relationship to the deformation theory of plasticity

[Int. J. Mech. Phys. Solids](#), vol. 20, pp. 281-300



[1979] E. Riks,

An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems

[International Journal of Solids and Structures](#)



[1998] G. Garcea, A. Trunfio, R. Casciaro

Mixed formulation and locking in path-following nonlinear analysis

[Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering](#)



[2008] R. Casciaro

Nonlinear analysis: main problems and solution methodologies

in: [La ricerca non ha fine. Il Ponte sullo Stretto di Messina, DEI 2008](#)



[2015] A. Madeo, G. Zagari, R. Casciaro

A Mixed 4-Node 3D Plate Element Based on Self-Equilibrating Isostatic Stresses

[International Journal of Structural Stability and Dynamics](#)



[2011] G. Garcea, L. Leonetti.

A unified mathematical programming formulation of strain driven and interior point algorithms,

[Int. J. Numer. Meth. Engrg.](#)

L'analisi pushover ed il suo uso nella progettazione antisismica

Raffaele Casciaro

professore emerito di Scienza delle Costruzioni
Università della Calabria
<http://www.labmec.unical.it>

Newsoft s.a.s. - Cosenza
<http://www.newsoft-eng.it>

rcasciaro@lgmail.com - raffaele.casciaro@unical.it
https://www.researchgate.net/profile/Raffaele_Casciaro

Ordine degli Ingegneri Roma - giugno 2017

Obbiettivi della presentazione

- L'analisi dinamica lineare rappresenta ancora il metodo di analisi più diffuso in ingegneria antisismica. E' utilizzata da più di 50 anni ed ha avuto un esteso riscontro con esiti in terremoti reali.
- Per sua natura non può tener conto delle caratteristiche di duttilità della struttura se non in modo sommario attraverso l'introduzione di un fattore di struttura q valutabile tuttavia solo mediante correlazioni euristico/qualitative.
- In ragione di ciò, nella progettazione di strutture in zona sismica si è andato diffondendo un approccio alternativo: l'Analisi Pushover.
- Utilizzata in alternativa o, ancor meglio, in combinazione con l'analisi dinamica lineare, rappresenta infatti uno strumento semplice ma relativamente potente per l'analisi di strutture soggette a spinte di forte intensità e ciclicamente variabili, quali quelle indotte dal sisma.
- Il suo maggiore vantaggio è quello di introdurre gli effetti della duttilità della struttura senza che sia richiesta alcuna valutazione empirica del fattore di struttura.
- Si vuole qui discutere dei presupposti del metodo Pushover, dei suoi limiti e dei suoi punti forza, ed illustrarne l'uso nella progettazione civile.

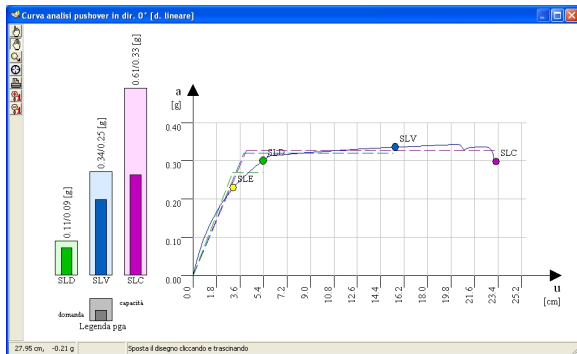
L'analisi pushover

- Studi recenti hanno evidenziato l'importanza di alcuni aspetti del comportamento nonlineare, in particolare dell'isteresi e della duttilità, nella risposta delle strutture ad azioni sismiche.
- Si è pertanto andata sviluppando una metodologia di analisi, spesso indicata come **Analisi Pushover**, indirizzata a valutare la capacità della struttura ad assorbire spostamenti in rapporto a quelli potenzialmente attivati dal sisma.
- L'analisi pushover è presente ormai, come opzione suggerita, nelle normative più recenti: le nostre NTC ma anche gli eurocodici e le FEMA e le ATC americane. Per le tipologie strutturali, come ad esempio le costruzioni in muratura, a prevalente comportamento nonlineare, rappresenta anzi la metodologia di analisi più fortemente consigliata
- In ragione della sua minore diffusione, della mancanza di un adeguato esteso riscontro sperimentale e, come vedremo, di alcuni aspetti deboli che ancora permangono nell'approccio, dovrebbe essere utilizzata con cautela e, se possibile, **come supporto e non in alternativa** all'analisi dinamica lineare.

Modalità dell'analisi

- la struttura è assoggettata ad una **spinta laterale di forma appropriata** a caratterizzare l'azione sismica;
- la spinta è fatta crescere proporzionalmente (analisi path-following) e viene costruito un diagramma nonlineare forza/spostamento o **curva di equilibrio** che segue l'evoluzione delle plasticizzazioni e dei danneggiamenti negli elementi;
- L'analisi viene arrestata quando il livello di danno supera quello ammesso dalle condizioni di verifica associate allo stato limite considerato;
- La curva di equilibrio individua un oscillatore semplice non lineare ed è utilizzata per definire un **oscillatore elastico equivalente**, caratterizzato, sotto sisma, da uno spostamento massimo eguale o quanto meno correlato;
- La risposta in spostamento dell'oscillatore elastico è direttamente **fornita dallo spettro**. Dalla correlazione può essere calcolato lo spostamento massimo potenzialmente attivato dal sisma nell'oscillatore nonlineare;
- Il rapporto (**capacità/domanda**) tra questo valore e quello effettivamente raggiunto nella curva fornisce il fattore di sicurezza sismica della struttura;
- L'analisi è **ripetuta più volte** con orientazioni diverse della spinta (almeno 8), in modo da rappresentare le possibili direzioni di incidenza sismica e si assume come fattore sicurezza complessivo il minore fra i quelli calcolati.

Curva Pushover



L'osservazione della curva fornisce due informazioni significative:

- il valore massimo di accelerazione sostenuta dalla struttura
- l'escursione massima dello spostamento raggiunto dalla struttura;

che possono essere usate per caratterizzare il fattore di struttura q e quindi migliorare l'affidabilità dell'analisi dinamica lineare.

Aspetti critici nell'analisi pushover

- **Spinta laterale di forma appropriata** . L'analisi sintetizza l'eccitazione sismica in una unica spinta. La semplificazione è sicuramente grossolana ma non così grave in quanto:
 - l'analisi può essere ripetuta a coprire tutte le possibili forme di spinta;
 - La presenza di plasticità e danneggiamento porta tipicamente ad una localizzazione della deformazione ed ad una relativa insensibilità della risposta a dettagli dell'azione esterna rispetto alla distribuzione di resistenza e duttilità negli elementi della struttura.
 - l'eventuale presenza di modi deformativi a carattere fragile è comunque sempre riconosciuta ed evidenziata con chiarezza.
- **La legge di danno**. Il danneggiamento, che descrive la perdita di portanza negli elementi a seguito di deformazioni (rotazioni) anelastiche eccessive, ha una influenza diretta sull'analisi in quanto condiziona lo spostamento massimo raggiungibile. Sono disponibili diverse formule (basate su estrapolazione di dati sperimentali e su considerazioni euristiche) che esprimono le rotazioni anelastiche limite in travi o pilastri. La ricerca è molto attiva in questo settore.
- **Oscillatore elastico equivalente**. L'amplificazione dinamica è ricondotta a quella di un oscillatore elastico equivalente. L'equivalenza, fra comportamenti qualitativamente diversi. **E' questo l'aspetto più debole dell'analisi.**

Oscillatore elastico equivalente

- L'idea di istituire una correlazione tra oscillatori elastici ed elastoplastici soggetti a carico ciclico che porti ad una equivalenza in termini di spostamento massimo raggiunto, risale ai primi '60 (Housner, Iwan).
- Come massa equivalente si assume quella reale. Resta quindi da tarare:
 - la rigidezza equivalente
 - la viscosità equivalente
- Sembrerebbe ragionevole assumere come rigidezza quella secante, quindi bassa rispetto a quella elastica iniziale, e definire la viscosità in ragione dell'energia dissipata nel ciclo di isteresi, funzione sia della rigidezza iniziale che della resistenza raggiunta. Era questo in effetti l'approccio iniziale.
- Ciò tuttavia si scontra col fatto che gli spettri di risposta, che definiscono l'azione sismica, sono tarati in ragione della modalità di utilizzo: in analisi dinamiche lineari che assumono come rigidezza quella elastica iniziale.
- Si è andati pertanto verso sistemi equivalenti caratterizzati da bassa viscosità (si assume un fattore viscoso del 5%) e rigidezza molto vicina a quella elastica iniziale (si assume la secante al 65% della portanza).
- In queste condizioni la stima della rigidezza è il dato più critico in quanto influisce direttamente sul risultato dell'analisi.

Vantaggi e svantaggi della pushover

- L'analisi pushover, in quanto basata su correlazioni almeno parzialmente euristiche, relative alla forma della spinta ed, ancora di più, alla definizione dell'oscillatore elastico equivalente, presenta elementi di incertezza e richiede pertanto qualche cautela.
- Presenta tuttavia dei vantaggi: mette direttamente in gioco la duttilità della struttura come parametro significativo, senza richiedere l'assunzione del fattore di struttura; inoltre evidenzia con chiarezza, se presenti, possibili modi locali di tipo fragile, generalmente ad alto rischio per la struttura.
- Rappresenta quindi un utile strumento con cui accompagnare l'analisi modale, in quanto agevola il confronto fra soluzioni progettuali diverse e fornisce indicazioni sui possibili miglioramenti della sicurezza della struttura ottenibili attraverso un rafforzamento locale degli elementi più critici.
- **L'uso combinato delle analisi modale e pushover risulta particolarmente efficace** in quanto le due analisi si completano a vicenda: la prima descrive in dettaglio la risposta in sollecitazioni della struttura, la seconda ne mette meglio in conto le capacità di spostamento. Un confronto tra le due fornisce poi elementi di scelta per una migliore calibrazione del fattore di struttura.

Rapporti con con l'analisi dinamica lineare

- Uno dei vantaggi dell'analisi pushover è quello di non richiedere una preventiva assunzione euristica del fattore di struttura.
- Lo svantaggio è quello di operare attraverso una semplificazione drastica della azione sismica, il cui effetto è ricondotto a quello di una unica spinta laterale.
- Si perde la ricchezza di dettagli ottenibile con l'analisi dinamica lineare in cui ciascun modo risponde secondo una sua propria amplificazione dinamica.
- L'amplificazione dinamica è tuttavia messa in conto, anche se solo globalmente, mediante la correlazione con uno schema elastico equivalente.
- L'analisi pushover diventa così uno strumento sintetico ma efficace per una valutazione complessiva della sicurezza sismica delle strutture.
- Il fatto poi, che durante l'analisi i possibili modi deformativi a comportamento fragile della struttura vengano evidenziati con chiarezza, la rende uno strumento utile per la progettazione in quanto capace di fornire informazioni dirette per una ottimizzazione locale del dimensionamento.

Gerarchia delle resistenze

- E' un criterio di progettazione che mira ad assicurare a priori un comportamento dissipativo/duttile.
- L'intento è quello di garantire che i meccanismi deformativi duttili (ad es. flessionali nelle travi) si attivino comunque prima che possano svilupparsi meccanismi a carattere fragile (crisi da taglio o presso-flessionale nei pilastri).
- Viene così scongiurato a-priori un possibile collasso fragile della struttura, di cui è ormai ampiamente documentata la pericolosità in relazione ad azioni sismiche.
- Il criterio opera attraverso un sistema di regole che, applicate in cascata a tutti i possibili meccanismi locali di collasso, comportano una sovra-resistenza in quelli a carattere fragile tale da impedirne a-priori l'attivazione rispetto a quelli a maggiore duttilità.
- Si vuole assicurare così un comportamento complessivamente duttile della struttura anche se questo risultato è ottenuto a volte al prezzo di un sovradimensionamento rispetto alle strette richieste del calcolo

Gerarchia delle resistenze ed analisi pushover

- Nell'applicazione delle regole di gerarchia, il rafforzamento di un elemento si ripercuote in cascata sul rafforzamento di quelli contigui.
- Ciò introduce un fenomeno che si ripercuote a cascata sugli elementi vicini e, se non ben gestito, può comportare un incremento rilevante delle armature e rendere problematico il dimensionamento della struttura, specie nei casi di irregolarità strutturale.
- Il comportamento duttile della struttura, perseguito dalla gerarchia delle resistenze, mediante regole euristico/empiriche a-priori, può essere conseguito, in modo forse più efficace e sicuramente meno oneroso, controllando a posteriori le risorse di duttilità disponibili attraverso una analisi effettivamente condotta in campo nonlineare.
- In effetti, l'analisi pushover evidenzia con chiarezza l'insorgenza di meccanismi di collasso fragile. Di conseguenza, la verifica che la struttura possieda adeguate risorse di duttilità può essere perseguita anche mediante l'analisi pushover (in sostituzione o in collaborazione con le regole di gerarchia delle resistenze).

La verifica pushover può sostituire le regole di gerarchia ?

- La verifica pushover, è espressamente indirizzata al controllo di duttilità della struttura e fornisce rispetto a questo obiettivo uno strumento affidabile di verifica.
- L'analisi evidenzia con chiarezza la possibile presenza di meccanismi a carattere fragile. Ciò permette, attraverso il rinforzo locale degli elementi interessati, di assicurare il rispetto della verifica.
- Le stesse Ntc08, al punto 7.3.6.2, relativo alle verifiche degli elementi strutturali in termini di duttilità e capacità di deformazione, danno la seguente indicazione:

Deve essere verificato che i singoli elementi strutturali e la struttura nel suo insieme possiedano una duttilità coerente con il fattore di struttura q adottato. Questa condizione si può ritenere soddisfatta applicando le regole di progetto specifiche e di gerarchia delle resistenze indicate per le diverse tipologie costruttive.

Alternativamente, e coerentemente con il modello e metodo di analisi utilizzato, si deve verificare che la struttura possieda una capacità di spostamento superiore alla domanda.

L'analisi pushover può sostituire l'analisi dinamica lineare ?

- L'analisi pushover è uno strumento relativamente recente ma attualmente oggetto di una vasta attività di ricerca, sia teorica che sperimentale, che ha portato ad un affinamento continuo delle tecnologie algoritmiche utilizzate ed ad una taratura attenta dei diversi parametri e fattori di sicurezza utilizzati dall'analisi.
- Fornisce uno strumento sintetico di verifica, non utilizzabile per una ricostruzione di dettaglio del comportamento degli elementi (anche se la sua abilità nell'evidenziare possibili meccanismi fragili, costituisce un utile aiuto alla progettazione.)
- In queste condizioni non può sostituire integralmente l'analisi dinamica lineare, che ha ormai al suo attivo una esperienza consolidata, almeno in strutture in cui il comportamento elastico ha importanza rilevante.
- Rispetto a questa ha il vantaggio di non richiedere l'assunzione di un fattore di struttura ma, anzi, di fornire informazioni su una sua migliore e più affidabile taratura
- **Rappresenta pertanto un utile completamento della analisi dinamica lineare e, in combinazione con questa, fornisce una valutazione migliore e più affidabile della sicurezza sismica della struttura.**

Conclusioni

L'analisi pushover rappresenta (al momento) un buon compromesso fra semplicità di analisi ed affidabilità di risultati, specie in casi di forte impegno anelastico.

Se si usano modellazioni e metodologie di soluzione appropriate, i risultati della simulazione statica sono affidabili e comunque capaci di evidenziare con chiarezza l'eventuale presenza di meccanismi deformativi quasi fragili e che quindi necessitano di eventuali rinforzi.

Per contro, l'approccio presenta ancora alcuni aspetti di relativa debolezza:

- Il sistema di forze utilizzato è ovviamente incapace di descrivere compiutamente l'azione sismica. Restano esclusi fenomeni legati ad azioni impulsive ad alta frequenza, irrilevanti sul comportamento globale della struttura ma importanti in relazione ad effetti locali sugli elementi strutturali.
- I risultati sono molto sensibili ad una accurata definizione della legge di evoluzione del danno e questa non sempre è disponibile ad un livello di conoscenza adeguato.
- L'elemento più debole riguarda tuttavia la definizione del sistema elastico equivalente che presenta ancora aspetti non del tutto risolti malgrado l'importanza che riveste nell'analisi in quanto rappresenta il collegamento tra la curva pushover e l'informazione contenuta nello spettro sismico.

Riferimenti



[1996] P. Fajfar, P. Gasperic.
The N2 method for the seismic damage analysis of RC buildings.
Earthquake Engineering & Structural Dynamics 25.1 (1996): 31-46.



[1996] —
ATC 40, Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings
Applied Technology Council, report ATC-40. Redwood City (1996).



[1997] —
NEHRP guidelines for the seismic rehabilitation of buildings BSS Council - FEMA-273
Federal Emergency Management Agency, 1997



[1996] H. Krawinkler
Pushover analysis: why, how, when, and when not to use it
Proceedings of the 65th Annual Convention of the Structural Engineering Association of California



[2000] P. Fajfar
A nonlinear analysis method for performance-based seismic design
Earthquake spectra 16.3 (2000): 573-592.



[2015] M.N. Fardis, E.C. Carvalho, P. Fajfar, A. Pecker
Seismic design of concrete buildings to Eurocode 8
Crc Press.

Modellazione ed analisi di strutture in muratura

Sintesi di alcune esperienze di ricerca

Raffaele Casciaro

professore emerito di Scienza delle Costruzioni
Università della Calabria
<http://www.labmec.unical.it>

Newsoft s.a.s. - Cosenza
<http://www.newsoft-eng.it>

rcasciaro@igmail.com - raffaele.casciaro@unical.it
https://www.researchgate.net/profile/Raffaele_Casciaro

Ordine degli Ingegneri Roma - giugno 2017

Obbiettivi della presentazione

Si vogliono evidenziare i diversi aspetti che intervengono nella modellazione e nell'analisi di strutture in muratura.

La presentazione riflette le esperienze maturate nel corso di alcuni progetti PRIN che hanno coinvolto ricercatori di diverse sedi universitarie, in particolare:

- PRIN 1998: Sviluppo di una strategia integrata per la modellazione, l'analisi e la verifica di costruzioni in muratura (Cosenza, Palermo, Roma 3, L'Aquila, Padova)
- PRIN 2003: Definizione di metodi integrati per la verifica strutturale di edifici in muratura (Cosenza, Milano, Padova, Roma 3, Potenza, Palermo)
- PRIN 2007: Modellazione ed analisi, su base prestazionale, di strutture non lineari (Cosenza, Padova, Bologna, Roma 3, Napoli, Palermo)
- PRIN 2010: Modelli ed algoritmi per l'analisi non lineare delle strutture e la validazione di regole di progettazione a base prestazionale. (Cosenza, Venezia, Padova, Bologna, Roma 3, Napoli, Palermo)

Importanza delle murature

Nell'introduzione al PRIN 1998, scrivevamo:

... Pur tralasciando la smisurata vastità del patrimonio italiano di beni architettonici, quasi tutti in opera muraria, il patrimonio edilizio complessivo della nazione presenta ancora una incidenza elevata di edilizia tradizionale in muratura, spesso in stato di forte degrado.

Inoltre è prevedibile per il futuro, anche sulla base dell'esperienza europea ... caratterizzata da un uso niente affatto marginale della muratura, un parziale ritorno a questa tipologia costruttiva, per i vantaggi che essa comporta ...

Malgrado il forte interesse verso il problema, testimoniato anche dal recente rinnovamento della normativa al riguardo, lo stato attuale delle conoscenze nel campo è in definitiva carente e non sono ancora disponibili metodologie di progettazione e verifica aventi un grado di affidabilità pari a quelle in uso nel campo delle costruzioni in cemento armato ed in acciaio...

Le ragioni di ciò vanno ricercate nella maggiore complessità del comportamento statico delle murature che rende inattendibili metodi basati su codici standard, solo apparentemente sofisticati, che ne ignorano gli aspetti peculiari... ”

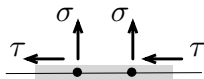
Modellazione tradizionale

- Spesso il materiale "muratura" è descritto come **continuo omogeneo di Cauchy**.
- Sono disponibili teorie consolidate, figlie del continuo di Cauchy, come quella delle **piastra caricate nel piano e fuori del piano**, e strumenti di calcolo potenti, quali il **metodo degli elementi finiti**. Ciò permette di modellare sia le singole pareti murarie che il loro assemblaggio scatolare, e di tener conto in maniera articolata anche di dettagli quali presenza di aperture, variazione di spessore, rinforzi localizzati, ecc.. .
- La muratura è tuttavia un materiale complesso, altamente disomogeneo al suo interno. Si presenta infatti come **aggregato di elementi eterogenei** (blocchi, mattoni, giunti di malta,..) con comportamento tra loro molto diverso e **di dimensione non trascurabile** rispetto a quella degli elementi strutturali ma tuttavia troppo fine da permettere una descrizione diretta dei singoli costituenti.
- Sorgono pertanto le domande:
 - **La muratura può essere ricondotta ad un continuo omogeneizzato?**
 - **ed, al caso, ad un continuo di Cauchy?**
 - **ed attraverso quali procedure di omogeneizzazione? .**

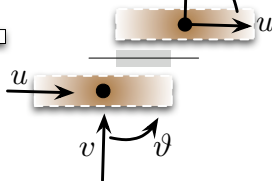
Muratura regolare in mattoni



giunto deformabile

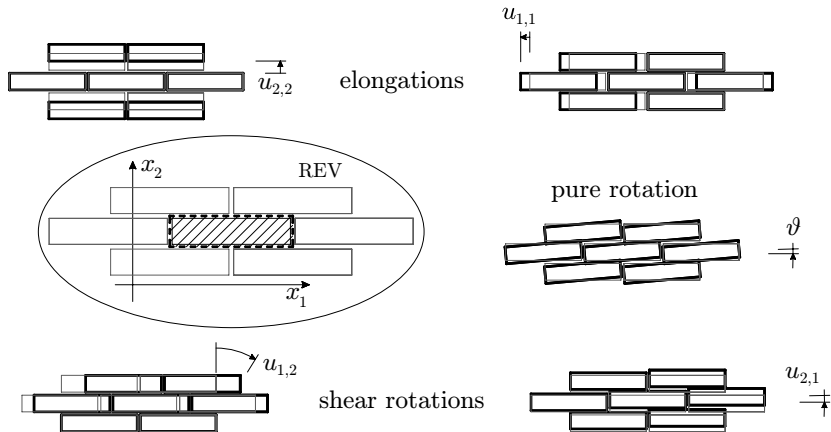


blocco rigido



Omogeneizzazione

Il continuo omogeneizzato equivalente è ottenuto imponendo l'equivalente energetica per un insieme di modi deformativi di un pattern di riferimento (**RVE**: Reference Volume Element)

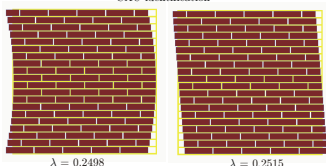


Quale continuo equivalente

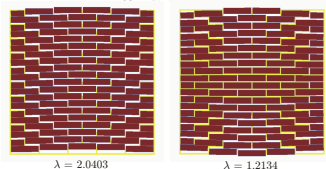
- Pur considerando un RVE molto semplice, sono presenti **5 modi deformativi diversi**.
- Il **continuo di Cauchy** presenta (nel piano) solo **3** parametri deformativi (ε_{xx} , ε_{yy} ed ε_{xy} richiede che vengano accorpati (in qualche modo) i **5** modi deformativi assumendone 2 in funzione dei restanti. La scelta più semplice, quella di identificare il modo rotazionale ad i due modi shear, comporta un effetto di locking (irrigidimento spurio nella soluzione). Ma sono possibili scelte diverse che evitano il locking (**Revised Cauchy**).
- Il **continuo di Cosserat** ha **5** parametri deformativi e quindi l'omogeneizzazione diventa meno ambigua.
- Si noti che in tutti i casi il continuo equivalente è caratterizzato da una forte ortotropia, che peraltro riflette quella dell'aggregato di partenza, e pertanto **non può essere trattato con tecnologia FEM standard** anche se ci si riduce ad un continuo di Cauchy.
- Nel caso del continuo di Cosserat, **non sono disponibili elementi FEM consolidati** e la stessa formulazione della piastra deve essere in qualche modo ridefinita.

Differenze tra le diverse omogeneizzazioni, per un singolo elemento

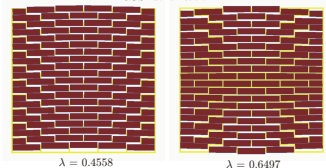
CAU identification



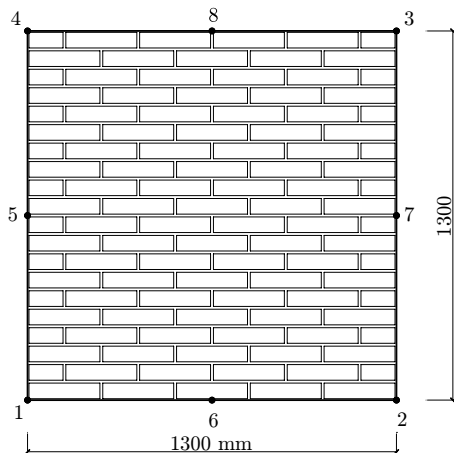
RCA identification



COS identification



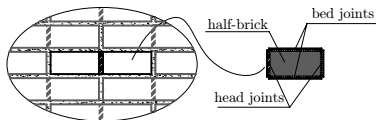
⇐ Modi a peggiore identificazione
 $\lambda = \text{rigidezza stimata} / \text{rigidezza reale}$.



Descrizione alla scala del singolo costituente

- Una modellazione macroscopica basata sul concetto di continuo equivalente, pone, abbiamo visto, dubbi sull'affidabilità dei risultati, anche se ci si limita alla sola modellazione elastica.
- Nel corso della ricerca si è pertanto ritenuto indispensabile ricorrere ad una descrizione dettagliata che esaminasse individualmente i singoli costituenti (mattoni e giunti di malta) dell'aggregato, al fine quanto meno di pervenire a risultati da utilizzare per la validazione di procedure semplificate.
- Con questa scelta è possibile descrivere in maniera relativamente affidabile il comportamento di ciascun giunto (giunti di malta all'interfaccia fra due mattoni o giunto di possibile rottura all'interno del singolo mattone) introducendo sia l'andamento variabile della tensione e della deformazione lungo il giunto che un legame costitutivo adeguato a rappresentare fenomeni nonlineari dovuti al danneggiamento, alla fessurazione ed all'attrito, e ricavando il comportamento globale del giunto mediante integrazione numerica per punti di Gauss.

Modellazione del danno, della fessurazione e dell'attrito



La muratura ha un comportamento fragile, caratterizzato da un danneggiamento per progressiva microfessurazione. In trazione, ciò porta all'apertura di fessure con perdita completa di resistenza. In compressione, le fessure pur se presenti hanno comunque una resistenza residua dovuta all'attrito. Questo comportamento, in un processo incrementale al passo, può essere modellato attraverso le relazioni:

$$\sigma = \mathbf{E} \varepsilon - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \bar{\sigma} \quad , \quad \bar{\sigma} = \begin{cases} \mathbf{E} \varepsilon & \text{if } \varepsilon \geq 0 \quad (\text{giunto aperto}) \\ \sigma_d & \text{if } \varepsilon < 0 \quad (\text{giunto chiuso}) \end{cases}$$

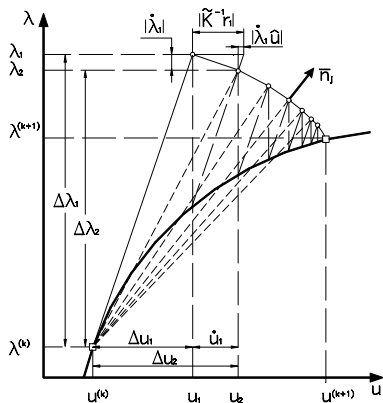
dove α è un parametro di danno, $\mathbf{E} := [k_n, k_t]$ è la matrice elastica, $\bar{\sigma}$ è il contributo della deformazione anelastica, e $\sigma_d := \{0, \tau_d\}$ tiene conto dello scorrimento tangenziale γ dovuto al superamento della tensione di attrito $-c \sigma$:

$$\tau_d := k_t \gamma - \max(-c \sigma, \min(c \sigma, \tau_0 + k_t(\gamma - \gamma_0)))$$

e l'indice 0 corrisponde a quantità valutate al passo precedente dell'analisi.

Analisi path-following

La presenza di non linearità richiede una strategia di soluzione incrementale in cui il processo di carico è descritto da una sequenza di piccoli incrementi. L'analisi fornisce una successione di punti di equilibrio, sufficientemente fitta da consentire la costruzione della curva carico/spostamento per interpolazione.



Il singolo punto è ottenuto mediante uno schema iterativo alla Riks (**arc-length method**).

Lo schema, ormai ampiamente consolidato, è molto efficiente, risulta tuttavia rallentato dalla presenza del danneggiamento che induce forti instabilità nelle relazioni di legame costitutivo.

Analisi multilivello

- Una modellazione fine quale quella descritta resta chiara sul piano logico. La sua soluzione diventa tuttavia complessa in relazione al numero elevato di mattoni e giunti da considerare e quindi delle variabili in gioco (dell'ordine delle centinaia di migliaia o milioni) ed alle forti nonlinearità introdotte dalla legge di danno. Ciò limita di molto la possibilità concreta di portare a termine l'analisi.
- Una via per superare l'inconveniente è offerta dalla strategia di multilivello. Questa opera utilizzando due o più modellazioni diverse a scala via via più fine ed impostando una strategia iterativa di soluzione che alterna le diverse scale per ridurre l'errore di equilibrio. La soluzione è ottenuta alla scala più fine, rispettando quindi tutti i dettagli definiti a questa scala, ma utilizza pesantemente contributi ottenuti alle scale rade, quindi in modo molto più agevole in relazione al minor numero di variabili coinvolte.
- Con una scelta appropriata delle diverse modellazioni ed una opportuna articolazione e taratura della strategia iterativa, si può ottenere un guadagno di efficienza dell'ordine delle centinaia di volte.

Schema della soluzione multilivello

La soluzione è raggiunta al livello locale attraverso un ciclo articolato di correzioni della soluzione locale \mathbf{u}_ℓ :

- ① squilibrio a livello locale

$$\mathbf{r}_\ell = \mathbf{r}_\ell[\mathbf{u}_\ell]$$

- ② trasferimento dello squilibrio da locale a globale

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{A}_{g\ell} \mathbf{r}_\ell$$

- ③ correzione a livello globale (decomposizione alla Choleski)

$$\mathbf{K}_g \Delta \mathbf{u}_g = \mathbf{r}_g \quad , \quad \mathbf{u}_g \leftarrow \mathbf{u}_g + \Delta \mathbf{u}_g$$

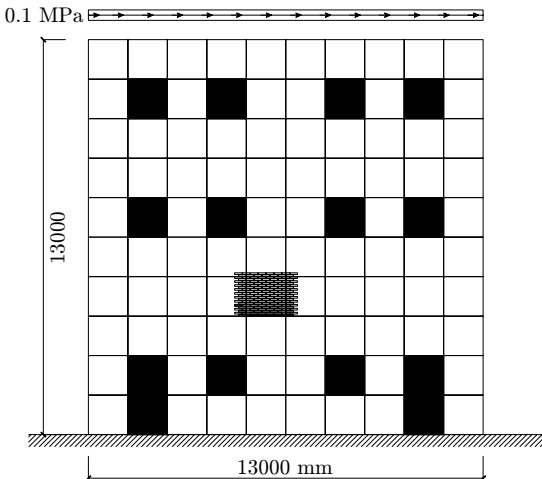
- ④ trasferimento della correzione da globale a locale

$$\Delta \mathbf{u}_\ell = \mathbf{A}_{\ell g} \Delta \mathbf{u}_g \quad \mathbf{A}_{\ell g} = \mathbf{A}_{g\ell}^T$$

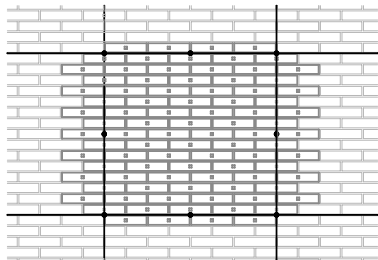
- ⑤ correzione a livello locale (cicli Gauss-Seidel)

$$\mathbf{K}_\ell \Delta \mathbf{u}_\ell = \mathbf{r}_\ell \quad , \quad \mathbf{u}_\ell \leftarrow \mathbf{u}_\ell + \Delta \mathbf{u}_\ell$$

Modellazione in due livelli

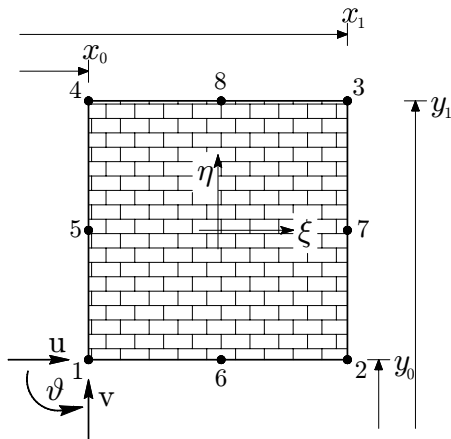


- La scala rada vede l'insieme della parete discretizzata in elementi finiti;
- La scala fitta vede i singoli costituenti (mattoni e giunti) con i loro dettagli interni.



Definizione dell'elemento

- L'elemento finito utilizzato nella descrizione rada potrebbe essere definito in modo standard, a partire da una opportuna omogeneizzazione in continuo equivalente.
- Questa scelta non è tuttavia conveniente (proprio per le differenze di comportamento introdotte dalla omogeneizzazione).
- Risulta conveniente definire l'elemento, per via algebrica, mediante condensazione statica del pattern di mattoni interno all'elemento.



Matrice globale dell'elemento e di trasferimento

La matrice dell'elemento può essere ottenuta per via algebrica:

- matrice locale dell'elemento

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bj} \\ \mathbf{K}_{jb} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_j \end{Bmatrix}$$

\mathbf{u}_b : spostamenti interni

\mathbf{u}_j : spostamenti di contorno (collegati alle variabili globali)

- condensazione statica

$$\bar{\mathbf{K}}_{jj} = \mathbf{K}_{jj} - \mathbf{K}_{jb} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bj}$$

- matrice globali dell'elemento

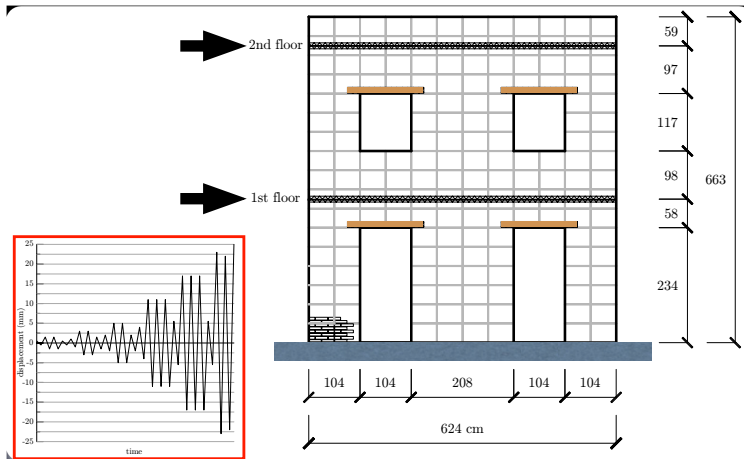
$$\mathbf{K}_g = \mathbf{A}_{gj}^T \bar{\mathbf{K}}_{jj} \mathbf{A}_{gj}$$

- matrice di trasferimento

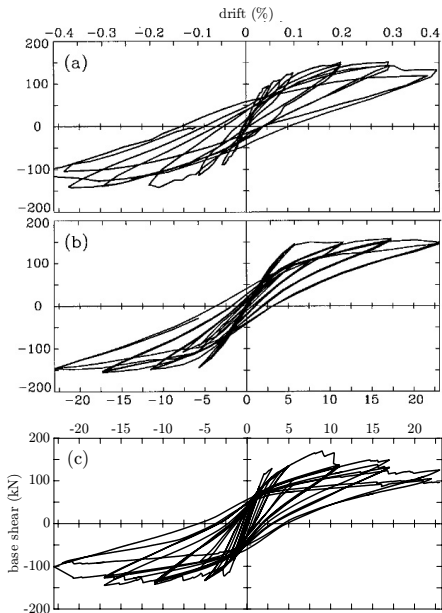
$$\Delta \mathbf{u}_\ell = \mathbf{A}_{\ell g} \Delta \mathbf{u}_g, \quad \mathbf{A}_{\ell g} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bj} \mathbf{A}_{jg} \\ \mathbf{A}_{jg} \end{bmatrix}$$

Test di Pavia

Test sperimentale su una casetta a due piani condotto all'Università di Pavia negli anni '90. La struttura è caricata con martinetti orizzontali con escursione ciclica di intensità crescente.



Confronto numerico/sperimentale



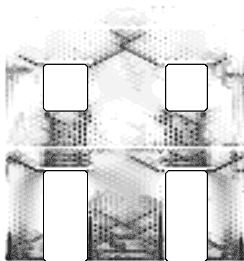
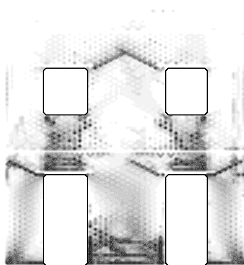
Curva carico/spostamento:

Soluzione numerica multilivello in Brasile, Casciari e Formica (2007)

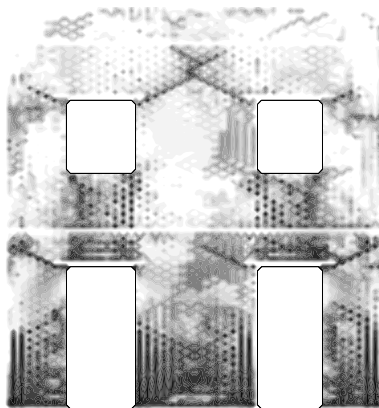
Soluzione numerica ottenuta da Gambarotta e Lagomarsino (1997)

Curva sperimentale

Mappe di danno



Danno dopo i cicli iniziali e nella situazione finale



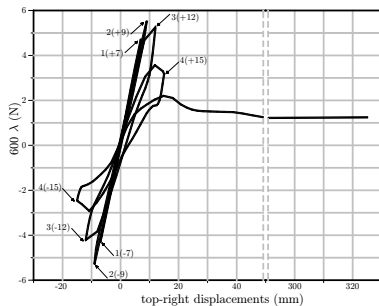
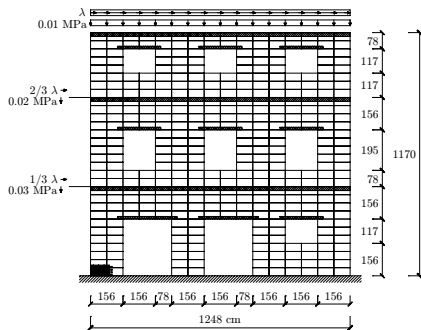
Alcune considerazioni

La simulazione numerica riproduce abbastanza fedelmente il test sperimentale, sia per quanto riguarda l'evoluzione del danno che l'ampiezza dei cicli di isteresi. Possiamo fare alcune considerazioni

- Il danno si evidenzia solo nei giunti di letto ed interessa poco quelli di testa. Ciò può essere considerato tipico per strutture ben realizzate.
- La struttura conserva una portanza relativamente elevata in ragione dell'attrito.
- Il danno si manifesta già nei cicli iniziali, e per escursioni limitate.
- In ragione di ciò, non possiamo stimare in modo affidabile il reale stato di danno iniziale.

Altra simulazione

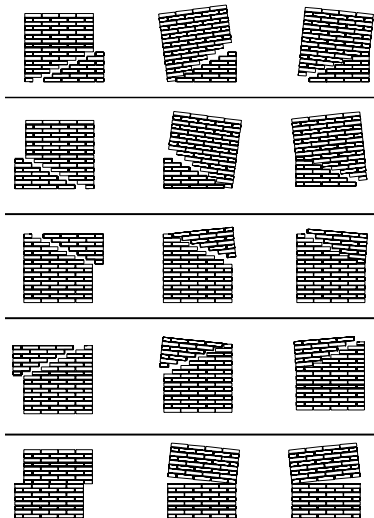
Le considerazioni precedenti valgono in generale. Si riporta, a titolo di esempio un altro risultato:



Verso una modellazione semplificata

- Una modellazione fine, quale quella descritta in precedenza, è cruciale per una comprensione dei fenomeni in gioco e per ottenere risultati utili ad un confronto.
- Non può essere, allo stato attuale delle tecnologie, un approccio utilizzabile nella pratica professionale.
- A questi fini, sembra indispensabile il ricorso a modelli radi, semplificati ma che tuttavia riproducano i caratteri essenziali della risposta fine.
- Partendo da una struttura vergine, il processo di danneggiamento si esaurisce in pochi cicli. Data anche le scarse informazioni sullo stato iniziale di danno, è ragionevole assumere nell'analisi (a vantaggio di sicurezza) che il processo sia già completato.
- In queste condizioni, la resistenza residua della struttura è controllata dall'attrito.
- I meccanismi anelastici che si riscontrano nelle simulazioni sono limitati in numero e ben individuabili.

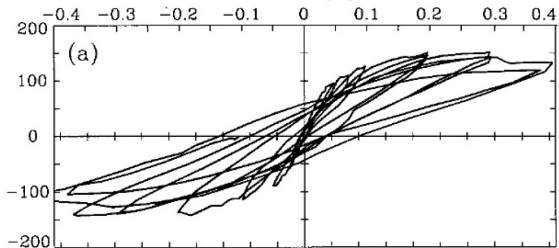
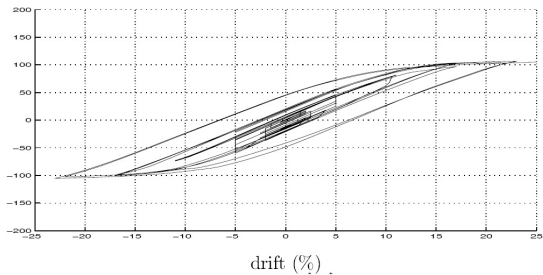
Deformazione anelastica nell'elemento



Modellazione semplificata

- Il comportamento elastico è ricavato con procedura semplificate (mediante opportuna taratura dei fattori elastici). Dato il ruolo, poco rilevante, nel comportamento complessivo della muratura, questa approssimazione può ritenersi soddisfacente.
- Viene usata una discretizzazione in elementi finiti misti, definiti in termini di spostamento, tensione e deformazioni anelastiche.
- L'elemento così definito è insensibile al locking e può essere utilizzato anche con discretizzazioni relativamente rade.
- Il legame costitutivo è definito assumendo già completato il processo di danneggiamento. Ciò semplifica e rende molto più veloce il processo di analisi.
- L'analisi è svolta con strategia path-following ed utilizza una variante in formato misto dell'algorithm iterativo arc-length.

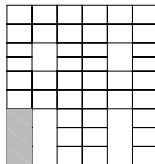
Validazione numerica: test di Pavia



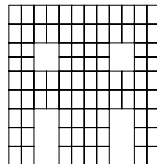
Mesh utilizzate

E' stato condotto un test di convergenza utilizzando discretizzazioni a diverso grado di finezza.

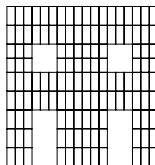
I risultati sono indistinguibili già a partire dalla mesh 3x3 con 318 variabili nodali, che corrispondono, come atteso ad una mesh relativamente rada.



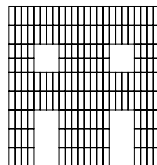
1x3 (126)



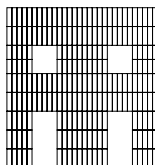
2x3 (222)



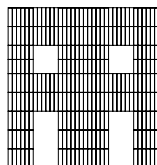
3x3 (318)



4x3 (414)

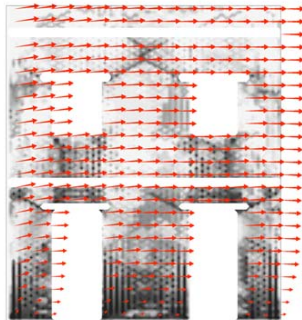
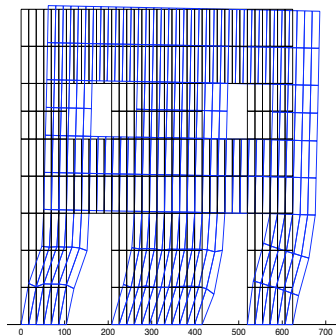


5x3 (510)



6x3 (606)

Spostamenti e mappa di danno



Analisi dinamica nonlineare

Il modello di muratura descritto può anche essere usato in simulazioni dinamiche. L'equazione di fine passo è in tal caso regolata dall'eguaglianza tra impulso della forza e differenza di quantità di moto, tra gli istanti iniziali e finali del passo, e si risolve, in definitiva, in una equazione vettoriale analoga a quella utilizzata nell'analisi statica. Questo approccio, indicato in Normativa come "Analisi dinamica nonlineare", consentirebbe una verifica sismica molto dettagliata. Tuttavia richiede:

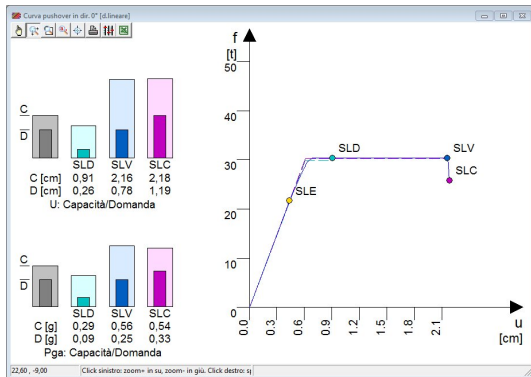
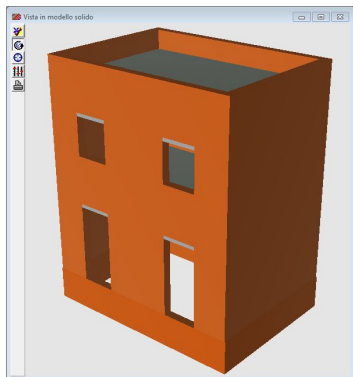
- la determinazione di un insieme di accelerogrammi, derivati (in qualche modo) dallo spettro di risposta del sito, in numero sufficiente da caratterizzare l'evento atteso.
- di ripetere l'analisi per ciascuno di questi e per ciascuna delle direzioni di incidenza sismica considerate, estendendo la simulazione per l'intera durata dell'eccitazione sismica (dell'ordine del minuto) e con passi sufficientemente piccoli da descrivere l'accelerogramma (dell'ordine del centesimo di secondo).

Si risolve pertanto in un processo di analisi molto pesante, difficilmente utilizzabile nella pratica professionale (allo stato attuale della tecnologia).

Analisi Pushover

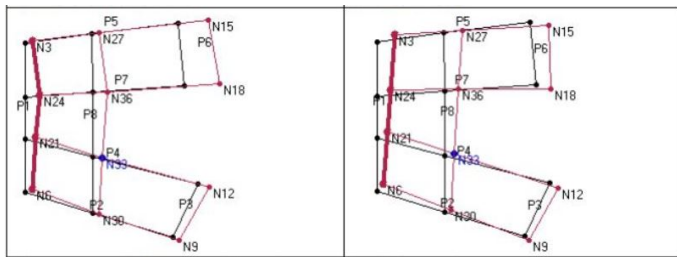
- Le strutture in muratura sono caratterizzate da un comportamento elastico molto complesso ma nell'insieme poco rilevante sulla risposta che è sempre fortemente condizionata dal comportamento anelastico.
- In questi contesti, l'analisi dinamica modale fornisce risultati poco significativi e comunque inaffidabili.
- Date le difficoltà dell'analisi dinamica nonlineare, l'analisi pushover rappresenta (al momento) il miglior compromesso fra semplicità di analisi ed affidabilità di risultati.
- Utilizzando modellazioni e strategie di soluzione appropriate, fornisce risultati affidabili, evidenziando con chiarezza l'eventuale presenza meccanismi deformativi quasi fragili e dando anche indicazioni sulle strategie di rinforzo.
- Anche se (come sempre) restano ampi margini di affinamento, specie in relazione alla definizione dell'oscillatore elastico equivalente, rappresenta uno strumento affidabile per la verifica sismica di costruzioni in muratura.

Analisi pushover in Por 2000



	Por2000	Test sperimentale
Forza max	30.3 T	≈ 30 T
Spostamento max	2.18 cm	≈ 2.5 cm

Considerazioni sulla rigidezza dei solai



- Per le costruzioni in muratura, la dizione "piano rigido" o "piano deformabile", mutuata da modellazioni alla ETABS usate negli anni '70 - '80 per le strutture intelaiate, può risultare fuorviante.
- La rigidezza dei solai è quasi sempre irrilevante rispetto a quella delle pareti murarie, mentre la indeformabilità in pianta è conseguenza del comportamento scatolare dell'insieme delle pareti (se correttamente ammortate). È lo stesso fenomeno presente nelle travi a cassone, potenziato dalla forte differenza tra i moduli E e G.
- La differenza di comportamento enfatizzata in figura è conseguenza della modellazione a telaio delle pareti murarie che non consente il trasferimento della tensione tangenziale tra pareti contigue e quindi annulla l'effetto scatolare.

Un commento finale

- L'analisi pushover è ovviamente incapace di descrivere compiutamente l'azione sismica. Restano esclusi fenomeni legati ad azioni impulsive ad alta frequenza, irrilevanti sul comportamento globale ma a volte significativi in relazione ad effetti locali sugli elementi strutturali. Questi aspetti, come pure quelli legati alle azioni verticali devono essere verificati per altra via.
- Il modello di muratura descritto in precedenza assume un esteso danneggiamento iniziale. Esclude tuttavia la presenza di estese fratture verticali ed il distacco in corrispondenza ai collegamenti tra le pareti. Questa rappresenta un condizione di estremo pericolo che bisogna evitare a-priori, con gli accorgimenti locali del caso (catene od altro).
- Se si esclude questa occorrenza, se cioè si è garantiti che la struttura possa assicurare il suo caratteristico comportamento scatolare, le murature forniscono un ottimo comportamento sismico.

Riferimenti



[1978]. M. Tomazevic
The Computer Program POR
Report ZRMK, Ljubljana, 1978



[1980] –
Raccomandazioni per la riparazione strutturale degli edifici in muratura
Regione Autonoma Friuli Venezia-Giulia, Udine 1980



[2007] A. Bilotta, R. Casciaro
A high-performance element for the analysis of 2D elastoplastic continua
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Jan 2007



[2000] G. Formica, R. Casciaro
Analisi nonlineare di pannelli murari soggetti a fenomeni di tipo fessurativo
Report n.16, Laboratorio di Meccanica Computazionale - Università della Calabria, dicembre 2000



[2002] Formica G., Sansalone V., Casciaro R.
A mixed solution strategy for the nonlinear analysis of brick masonry walls
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002



[2007] S. Brasile, R. Casciaro, G. Formica
Multilevel approach for brick masonry walls - Part I: A numerical strategy for the nonlinear analysis
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Nov 2007

Riferimenti



[2007] S. Brasile, R. Casciaro, G. Formica

Multilevel approach for brick masonry walls - Part II: On the use of equivalent continua
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Nov 2007



[2009] S. Brasile, R. Casciaro

Multilevel approach for brick masonry walls - Part III: A strategy for free vibration analysis
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Nov 2009



[2010] S. Brasile, R. Casciaro, G. Formica

Finite Element formulation for nonlinear analysis of masonry walls
Computers & Structures, Feb 2010



[1998] PRIN 1998

Sviluppo di una strategia integrata per la modellazione, l'analisi e la verifica di costruzioni in muratura



[2003] PRIN 2003

Definizione di metodi integrati per la verifica strutturale di edifici in muratura



[2007] PRIN 2007

Modellazione ed analisi, su base prestazionale, di strutture non lineari



[2010] PRIN 2010

Modelli ed algoritmi per l'analisi non lineare delle strutture e la validazione di regole di progettazione a base prestazionale.